# Relatività Ristretta

Appunti (non rivisti) delle lezioni del professor Emilio d'Emilio

un progetto di

www.eigenlab.org

a cura di

Francesco Cicciarella

# Note legali

Copyright © 2011-2012 di Francesco Cicciarella
*Appunti di Relatività Ristretta*
è rilasciato sotto i termini della licenza
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia.
Per visionare una copia completa della licenza, visita
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode`

# Liberatoria, mantenimento e segnalazione errori

Questo documento viene pubblicato, in formato elettronico, senza alcuna garanzia di correttezza del suo contenuto. Il testo, nella sua interezza, è opera di

`Francesco Cicciarella`
`<f[DOT]cicciarella[AT]inventati[DOT]org>`

e viene mantenuto dallo stesso, a cui possono essere inviate eventuali segnalazioni di errori.

Pisa, 10 Ottobre 2012

# Indice

**1 Introduzione** **3**
1.1 Pippone sul perché la relatività è saltata fuori . . . 3
1.2 Spaziotempo di Minkowski . . . 3

**2 Trasformazioni di Lorentz** **4**
2.1 In 1+1 dimensioni . . . 4
2.2 In 3+1 dimensioni . . . 7

**3 Cenni di teoria dei gruppi** **9**
3.1 Rappresentazioni di gruppi . . . 9
3.2 Rappresentazioni irriducibili . . . 12

**4 Formulazione covariante della Dinamica** **14**
4.1 Principi della Dinamica . . . 14
4.2 Quantità di moto . . . 14
4.3 Secondo principio . . . 16
4.4 Forze . . . 20

**5 Meccanica analitica e relatività** **21**

**6 Esercizi** **22**

# Capitolo 1

# Introduzione

## 1.1 Pippone sul perché la relatività è saltata fuori

## 1.2 Spaziotempo di Minkowski

Un punto dello spaziotempo di Minkowski è detto *evento*, e le traiettorie sono dette *linee d'universo*. La bisettrice indica come si muove la luce, tutti gli altri eventi possono propagarsi nel doppio cono individuato dalle bisettrici. $V_+$ è denominato *cono futuro* e $V_-$ invece *cono passato*. La quantità

$$\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}$$

è detta *tempo proprio*.

# Capitolo 2

# Trasformazioni di Lorentz

## 2.1 In 1+1 dimensioni

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, $K, K'$, con $K'$ che si muove rispetto a $K$ con velocità $\beta$. All'istante $t = 0$, le origini dei due sistemi coincidono. Il versore dell'asse $ct'$ nel sistema $K$ è $\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1)$; allora le coordinate in $K$ dei punti $A$ ed $E$ saranno

$$A = \frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1) \qquad E = -\frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1)$$

Per costruzione, si ha

$$A = E + r(1, 1) + s(-1, 1)$$

da cui si ottiene

$$r = \frac{1+\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\tau, \qquad s = \frac{1-\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\tau$$

e di conseguenza le coordinate di $R$ nel sistema di riferimento $K$ saranno

$$R = \frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(1, \beta)$$

$R$ pertanto giace su una retta simmetrica a $ct'$ rispetto alla bisettrice, che rappresenta l'asse $x'$ nel sistema $K$. Passando da $K'$ a $K$ avremo dunque le seguenti relazioni:

$$A = \begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto a(\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} t$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} \longmapsto b(\beta) \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} x$$

Se tali trasformazioni sono lineari, allora conoscendo una base dello spazio è possibile sapere come viene trasformato ogni punto. Intanto, osserviamo che mandano rette in rette. La linearità discende direttamente dall'omogeneità dello spazio. In virtù di ciò, possiamo riscrivere le trasformazioni come:

$$\begin{cases} t' = a(\beta)t + b(\beta)\beta x \\ \\ x' = a(\beta)\beta t + b(\beta)x \end{cases} \tag{1}$$

Restano quindi da determinare $a(\beta), b(\beta)$. Osserviamo che se $K'$ si muove rispetto a $K$ con velocità $\beta$, allora $K$ si muoverà rispetto a $K'$ con velocità $-\beta$. Allora le equazioni (1) diventano:

$$\begin{cases} t = a(-\beta)t' - b(\beta)\beta x' \\ \\ x = a(-\beta)\beta t' + b(-\beta)x \end{cases}$$

Dato che mandando $\beta$ in $-\beta$ le trasformazioni devono coincidere, si conclude che $a, b$ sono funzioni pari di $\beta$, cioè

$$\begin{cases} t' = a(|\beta|)t + b(|\beta|)\beta x \\ \\ x' = a(|\beta|)\beta t + b(|\beta|)x \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} t = a(|\beta|)t' - b(|\beta|)\beta x' \\ \\ x = -a(|\beta|)\beta t' + b(|\beta|)x' \end{cases} \tag{2.2}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta b \\ \beta a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta b \\ \beta a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ -\beta a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

Allora dovrà essere

$$\begin{pmatrix} a & \beta b \\ \beta a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ -\beta a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - \beta^2 ab & -\beta ab + \beta b^2 \\ \beta a^2 - \beta ab & -\beta^2 ab + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da ciò si ricava

$$\begin{cases} \beta b(a-b) = 0 \Longrightarrow a = b \\ \\ a^2(1-\beta^2) = 1 \Longrightarrow a^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \end{cases}$$

dunque, posto $\beta = v/c$ si ha

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma(v)$$

In conclusione, le equazioni

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta t) \\ \\ t' = \gamma(t + \beta x) \end{cases} \tag{2.3}$$

rappresentano le *trasformazioni di Lorentz ortocrone e proprie in 1+1 dimensioni.* In forma matriciale, le trasformazioni saranno

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Ricaviamo infine la legge di composizione delle velocità. Eseguiamo il differenziale delle trasformazioni (2.3):

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx + \beta dt) \\ \\ dt' = \gamma(dt + \beta dx) \end{cases}$$

e dunque

$$\frac{dx'}{dt'} = v' = \frac{dx + \beta dt}{dt + \beta dx} = \frac{\frac{dx}{dt} + u}{1 + u\frac{dx}{dt}} = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

La quantità conservata nella metrica di Minkowski è la *lunghezza di Minkowski* $\sqrt{(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2}$.
Osserviamo che $\det L = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$. Allora esisterà un parametro $\vartheta$, detto *rapidità*, tale che

$$\begin{cases} \gamma = \cosh\vartheta \\ \\ \beta\gamma = \sinh\vartheta \end{cases}$$

Allora le trasformazioni di Lorentz possono essere scritte nella forma

$$\begin{pmatrix} dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Verifichiamo se vi sono analogie con le rotazioni in $\mathbb{R}^2$. Se applichiamo due trasformazioni con rapidità $\vartheta_1$ e $\vartheta_2$, si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh\vartheta_1 & \sinh\vartheta_1 \\ \sinh\vartheta_1 & \cosh\vartheta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\vartheta_2 & \sinh\vartheta_2 \\ \sinh\vartheta_2 & \cosh\vartheta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\vartheta_1\cosh\vartheta_2 + \sinh\vartheta_1\sinh\vartheta_2 & \cosh\vartheta_1\sinh\vartheta_2 + \sinh\vartheta_1\cosh\vartheta_2 \\ \sinh\vartheta_1\cosh\vartheta_2 + \cosh\vartheta_1\sinh\vartheta_2 & \sinh\vartheta_1\sinh\vartheta_2 + \cosh\vartheta_1\cosh\vartheta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta_1+\vartheta_2) & \sinh(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ \sinh(\vartheta_1+\vartheta_2) & \cosh(\vartheta_1+\vartheta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Osserviamo che anche in questa forma la lunghezza di Minkowski è conservata:

$$\begin{aligned} (d\tau)^2 = (dt')^2 - (dx')^2 &= (\cosh\vartheta dt + \sinh\vartheta dx)^2 - (\sinh\vartheta dt + \cosh\vartheta dx)^2 = \\ &= (\cosh^2\vartheta - \sinh^2\vartheta)(dt)^2 - (\cosh^2\vartheta - \sinh^2\vartheta)(dx)^2 = \\ &= (dt)^2 - (dx)^2 \end{aligned}$$

Il gruppo di matrici indotte da trasformazioni di Lorentz è denominato *gruppo ortogonale speciale* (1,1), e di denota con $SO(1,1)$.
Ricaviamo anche in questa forma la legge di composizione delle velocità. Sapendo che

$$\frac{v}{c} = \beta = \frac{\sinh\vartheta}{\cosh\vartheta} = \tanh\vartheta$$

si ha

$$\beta_1 \circ \beta_2 = \tanh(\vartheta_1+\vartheta_2) = \frac{\tanh\vartheta_1 + \tanh\vartheta_2}{1+\tanh\vartheta_1\tanh\vartheta_2} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$$

Moltiplicando tutto per $c$ otteniamo

$$v_1 \circ v_2 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} \tag{2.5}$$

La legge di composizione delle velocità della meccanica Newtoniana rientra nell'ordine zero di approssimazione per piccole velocità. Infatti se $\frac{v_1}{c}, \frac{v_2}{c} \ll 1$, allora, sviluppando in serie di Taylor il denominatore della (2.5) si ha

$$v_1 \circ v_2 = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} \simeq (v_1+v_2)\left(1 - \frac{v_1v_2}{c^2} + \cdots\right) \simeq v_1+v_2$$

Introduciamo adesso il *tensore metrico* $g_{\mu\nu}$ dato da

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \qquad \mu = 0;1,2,3 \tag{2.6}$$

In 1+1 dimensioni, cioè nello spaziotempo $\mathbb{M}^2$,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le trasformazioni di Lorentz sono date da

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = L(\vartheta) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$${}^t x'_\nu g_{\mu\nu} x_\nu = {}^t x_\nu {}^t L(\vartheta) g_{\mu\nu} L(\vartheta) x_\nu$$

da cui $g = {}^t L g L$.
Dato un punto nel cono-luce, è sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui il punto non abbia componenti sugli assi spaziali, cioè in modo tale che

$$dx' = \gamma(dx + \beta dt) = 0 \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\beta$$

quindi è sufficiente scegliere un sistema di riferimento che si muova rispetto al primo con velocità $-\beta$. Un vettore dello spaziotempo non avente componenti sugli assi spaziali è detto *vettore-tempo*. Si osserva che il prodotto scalare fra due vettori-tempo è sempre negativo. Da questo si deduce che i coni-luce $V_+$ e $V_-$ sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

## 2.2 In 3+1 dimensioni

Il gruppo delle rotazioni in $\mathbb{R}^3$ è un sottogruppo delle matrici di Lorentz. Nello spazio di Minkowski $\mathbb{M}^4$, possiamo generalizzare la (2.4) a 3+1 dimensioni:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Con la condizione che la matrice della trasformazione, che denotiamo $\Lambda$ sia tale che ${}^t\Lambda g \Lambda = g$. Allora i quadrivettori $(x, y, z, t) \in \mathbb{M}_4$ sono tali che

$$\begin{cases} x'_\mu = \Lambda_{\mu\alpha} x_\alpha \\ {}^t\Lambda g \Lambda = g \\ \langle x', y' \rangle = \langle x, y \rangle \end{cases} \qquad \lambda \in SO(3,1)$$

Vi sono particolari forme della matrice di Lorentz $\Lambda$ che danno luogo alle cosidette *inversioni*:

- Se $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ abbiamo l'*inversione temporale*, cioè

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

- Se $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ abbiamo l'*inversione spaziale*, cioè

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

- Se $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -\mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ abbiamo l'*inversione dello spaziotempo*, cioè

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

Il gruppo costituito dalle matrici indotte da trasformazioni di Lorentz è denominato *gruppo di Lorentz* e si denota con $\mathcal{L}$. Si tratta di un gruppo continuo non compatto ed è unione di quattro sottogruppi:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+_\uparrow \cup \mathcal{L}^+_\downarrow \cup \mathcal{L}^-_\uparrow \cup \mathcal{L}^-_\downarrow$$

Il sottogruppo $\mathcal{L}^+_\uparrow$ è il *gruppo di Lorentz ortocrono*, cioè costituito da trasformazioni che non coinvolgono inversioni.

# Capitolo 3

# Cenni di teoria dei gruppi

## 3.1 Rappresentazioni di gruppi

Consideriamo il gruppo delle rotazioni in $\mathbb{R}^2$, con tensore metrico $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Una rotazione intorno all' asse $\hat{z}$ è data da

$$R(\hat{z}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Le matrici del gruppo delle rotazioni sono tali che ${}^tR = R^{-1}$. Abbiamo inoltre una rappresentazione del gruppo $(\mathbb{R}, +)$ in $R(\theta)$ dotato del prodotto righe per colonne data da

$$\theta_1, \theta_2 \in (\mathbb{R}, +) \longmapsto \theta_1 + \theta_2$$

$$R(\theta_1), R(\theta_2) \in (R(\theta), \circ) \longmapsto R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

Introduciamo adesso il *generatore* del sottogruppo delle rotazioni intorno all'asse $\hat{z}$ $L_z$, dato da:

$$L_z := \left.\frac{dR(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$L_z^2 = -\mathbb{I}, \qquad L_z^3 = -L_z, \qquad L_z^4 = \mathbb{I}$$

Allora, esponenziando il generatore e sviluppando in serie di Taylor otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{\theta L_z} &= \mathbb{I} + \theta L_z + \frac{1}{2!}\theta^2 L_z^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 L_z^3 + \cdots = \\ &= \mathbb{I} + \theta L_z - \frac{1}{2}\theta^2 \mathbb{I} - \frac{1}{6}\theta^3 L_z + \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots\right)\mathbb{I} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \cdots\right) L_z \end{aligned}$$

Il termine proporzionale a $\mathbb{I}$ è lo sviluppo di $\cos\theta$, mentre quello proporzionale a $L_z$ è lo sviluppo di $\sin\theta$, dunque si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{\theta L_z} &= \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \end{aligned}$$

Vediamo se adesso troviamo dei generatori del gruppo di Lorenz nello spazio di Minkowski $\mathbb{M}^2$. Il tensore metrico sarà $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e consideriamo una trasformazione di rapidità $\vartheta$:

$$L(\hat{x}, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$$

Anche in questo caso, ricordiamo, abbiamo una rappresentazione del gruppo $(\mathbb{R}, +)$ in $\mathcal{L}$ dotato del prodotto righe per colonne del tutto analoga a quella delle rotazioni, cioè

$$L(\hat{x}, \vartheta_1)L(\hat{x}, \vartheta_2) = L(\hat{x}, \vartheta_1 + \vartheta_2)$$

Le matrici di Lorentz soddisfano la relazione ${}^tLgL = g$. Definiamo a questo punto, analogamente al caso delle rotazioni, il *generatore del sottogruppo ad un parametro del boost di Lorentz* (lungo l'asse $\hat{x}$) $M_x$:

$$M_x := \left.\frac{dL(\vartheta)}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha che

$$M_x^2 = \mathbb{I}, \qquad M_x^3 = M_x$$

Allora, sempre in analogia alle rotazioni, tramite l'esponenziazione del generatore e lo sviluppo in serie di Taylor, troviamo che

$$L(\hat{x}, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} = e^{\vartheta M_x}$$

Considerando adesso le rotazioni in $\mathbb{R}^3$, otteniamo che, dato che possiamo ruotare intorno a tre assi indipendentemente, abbiamo tre generatori distinti $L_x, L_y, L_z$, dati da

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che le rotazioni non sono commutative, dunque, introducendo l'operatore *commutatore* $[A, B] = AB - BA$ si ha

$$\begin{cases} [L_x, L_y] = -L_z \\ \\ [L_a, L_b] = -\epsilon_{abk} \end{cases} \qquad [L_a]_{bc} = \epsilon_{abc} L_c$$

In $\mathbb{M}^4$, a seconda degli assi su cui viene eseguito il boost di Lorentz, abbiamo tre generatori di boost $M_x, M_y, M_z$:

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Dunque in $\mathbb{M}^4$ si hanno sei generatori, tre di boost e tre di rotazioni per cui valgono le relazioni:

$$\begin{cases} [L_a, L_b] = -\epsilon_{abk} L_k \\ \\ [M_a, M_b] = \epsilon_{abk} L_k \\ \\ [L_a, L_b] = -\epsilon_{abk} M_k \end{cases}$$

Prendiamo in esame adesso un boost di Lorentz in $\mathbb{M}^4$ sull'asse $\hat{x}$, senza rotazioni sugli altri assi, di rapidità $\vartheta$, cioè

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta & 0 & 0 \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni di Lorentz in forma differenziale saranno pertanto

$$\begin{cases} dt' = \gamma(dt + \beta dx) \\ \\ dx' = \gamma(dx + \beta dt) \\ \\ dy' = dy \\ \\ dz' = dz \end{cases}$$

Vogliamo adesso scrivere come trasforma la velocità componente per componente. Dividendo ciascuna delle componenti spaziali per la componente temporale si ottengono le relazioni:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{v + dx/dt}{1 + \frac{v}{c^2} dx/dt}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{dt + \beta dx} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy/dt}{1 + \frac{v}{c^2} dx/dt}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dz/dt}{1 + \frac{v}{c^2} dx/dt}$$

Queste trasformazioni però non sono soddisfacenti, in quanto le componenti $y$ e $z$ della velocità dipendono dalla componente $x$. L'obiettivo è scrivere una trasformazione simile a quella per i quadrivettori. L'unica cosa è pensare la velocità anch'essa come un quadrivettore. Definiamo perciò la velocità $\vec{u}$:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

dove $d\tau$ è il tempo proprio. Sappiamo che la relazione fra il tempo proprio di un sistema di riferimento e lo stesso tempo misurato in un altro sistema di riferimento è data da

$$d\tau = \gamma dt$$

Allora

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} \frac{d\tau}{dt} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt}$$

da cui

$$\begin{cases} u_0 = \gamma \dfrac{d}{dt}(ct) = \gamma c \\ \\ \vec{u} = \gamma \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \gamma \vec{v} \end{cases} \tag{3.1}$$

Per i quadrivettori, sapevamo che il prodotto scalare

$$\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x_\mu = x^2 - (ct)^2$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz. Per le *quadrivelocità*, la quantità invariante è il modulo, dato da

$$u_\mu g_{\mu\nu} u_\nu = -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 v^2 = \frac{v^2 - c^2}{1 - v^2/c^2} = c^2 \frac{v^2 - c^2}{c^2 - v^2} = -c^2$$

in questo caso, dato che si tratta del quadrato della velocità della luce, oltre ad essere invariante è anche costante.

## 3.2 Rappresentazioni irriducibili

Trovare dunque una rappresentazione irriducibile, significa trovare l'unica decomposizione dello spazio in sottospazi invarianti non ulteriormente riducibili. Il problema delle rappresentazioni irriducibili può essere riportato a trovare i generatori delle rotazioni. Il gruppo delle rotazioni, ricordiamo, è definito da

$$x'_i = R_{ia} x_a \qquad i, a = 1, 2, 3$$

le quantità scalari sono tali che $s' = 1 \cdots s$, mentre i tensori sono matrici le cui componenti trasformano sotto rotazione nel seguente modo:

$$T'_{ij} = R_{ia} R_{jb} T_{ab} \tag{3.2}$$

tramite i tensori siamo in grado di trasformare i polinomi omogenei. Rappresentando il tensore $T$ come un vettore colonna di nove componenti, cioè

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ \vdots \\ T_{33} \end{bmatrix}$$

allora la rotazione (3.2) può essere espressa come

$$T' = R \circ RT$$

dove $R \in M(9, \mathbb{R})$ è tale che $R_1 \circ R_1 \cdot R_2 \circ R_2 = R_1 R_2 \circ R_1 R_2$ e dunque $R_1 R_2 = R_{1 \circ 2}$. In termini di versore $\hat{n}$ e angolo di rotazione $\varphi$ si ha

$$(\hat{n}, \varphi) \longmapsto R_{9\times 9}(\hat{n}, \varphi), \qquad R_1^{9\times 9} \cdot R_2^{9\times 9} = R_{1\circ 2}^{9\times 9}$$

Abbiamo dunque una *rappresentazione 9-dimensionale* del gruppo delle rotazioni. Come tensore, data la posizione e l'impulso di una singola particella, possiamo considerare il prodotto esterno

$$T_{ab} = x_a p_b$$

Se un tensore $S$ è simmetrico, cioè $S_{ab} = S_{ba}$, sarà ancora simmetrico in un sistema di riferimento ruotato? Applichiamo una rotazione al tensore $S$

$$S'_{ij} = R_{ia} R_{jb} S_{ab} = R_{ia} R_{jb} S_{ba} = R_{jb} R_{ia} S_{ba} = S'_{ji}$$

Stessa cosa se il tensore è antisimmetrico. In particolare, ogni tensore a due indici può essere scritto come somma di un tensore simmetrico e di uno antisimmetrico. Allora, lo spazio vettoriale dei tensori è somma diretta del sottospazio vettoriale delle matrici simmetrice e di quello delle matrici antisimmetriche, il primo avente dimensione 6 e il secondo 3:

$$T = S + A, \qquad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ & s_{22} & s_{23} \\ & & s_{33} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché gli spazi stanno in somma diretta, rappresentando il tensore in forma vettoriale e applicando una rotazione, le componenti provenienti dalla matrice simmetrica non devono mischiarsi con quelle provenienti dalla matrice antisimmetrica. Allora avremo qualcosa della forma

$$\begin{pmatrix} R_1^{6\times 6} & 0 \\ 0 & R_2^{3\times 3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} s_1 1 \\ s_1 2 \\ \vdots \\ s_{23} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}$$

Notiamo inoltre che in tre dimensioni, i tensori antisimmetrici possono essere identificati con i vettori tramite la contrazione con l'indice antisimmetrico $\epsilon_{iab}$, $A_{ab}\epsilon_{iab} \equiv L_i$. Dunque bisogna ridurre il sottospazio delle matrici simmetriche. Sia $S$ un tensore simmetrico, e ne considero la traccia:

$$s = s_{11} + s_{22} + s_{33}$$

Allora:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ & s_{22} & s_{23} \\ & & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} - \frac{1}{3}s & s_{12} & s_{13} \\ & s_{22} - \frac{1}{3}s & s_{23} \\ & & s_{33} - \frac{1}{3}s \end{pmatrix} + \frac{1}{3}s\delta_{ij}$$

da cui

$$\begin{aligned} \delta^{ij} S'ij &= \delta^{ij} R_{ia} R_{jb} S_{ab} = \\ &= {}^t R_{ai} \delta_{ij} R_{jb} S_{ab} = \\ &= {}^t R_{ai} R_{ib} S_{ab} = \\ &= \delta_{ab} S_{ab} \end{aligned}$$

Da questa relazione concludiamo che la traccia di un tensore simmetrico è uno scalare (infatti abbiamo provato che è invariante per rotazione). Allora, in quanto sussiste una relazione di dipendenza lineare non banale, abbiamo trovato una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni in $\mathbb{R}^3$, costituita dai tensori simmetrici stracciati (cinque parametri liberi), i vettori (matrici antisimmetriche, tre parametri liberi) e uno spazio unidimensionale formato dagli scalari (le tracce dei tensori simmetrici). Abbiamo dunque: $\underline{3} \otimes \underline{3} = 9 = \underline{5} \oplus \underline{3} \oplus \underline{1}$. Passando adesso al gruppo di Lorentz, le quantità invarianti per boost di Lorentz sono i 4-scalari. Avremo similmente i 4-tensori (rango 2: $T_{\{\mu\nu\}}, F_{[\mu\nu]}, \ldots$).

# Capitolo 4

# Formulazione covariante della Dinamica

## 4.1 Principi della Dinamica

1. Principio d'inerzia. Tutti i sistemi di riferimento inerziali in moto relativo uniforme sono indistinguibili. Questo è un caso particolare del principio di relatività, quindi rimane valido anche nella formulazione relativistica.

2. L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza applicata su di esso.

3. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, agente sulla stessa retta.

L'introduzione delle trasformazioni di Lorentz ha avuto come conseguenza la perdita del concetto di *simultaneità* degli eventi, infatti se per un osservatore in un determinato sistema di riferimento due eventi accadono nello stesso istante, è immediato verificare che esistono infiniti sistemi di riferimento in cui essi sono sfasati. Questa è una diretta conseguenza della costanza della velocità della luce. Inoltre, i sistemi in cui si lavorava nella meccanica Newtoniana erano *isolati*, cioè in assenza di forze esterne. Con l'introduzione dei campi (gravitazionale, elettromagnetico) che regolano i diversi tipi di interazione, questa ipotesi non è più valida, unitamente all'ipotesi di *istantaneità* della propagazione dell'interazione. Difatti, la velocità della luce è quella massima con cui un segnale può propagarsi, dunque, per esempio, se muovo una carica e di conseguenza modifico il campo elettromagnetico che essa crea, una seconda carica posta a distanza $r$ risentirà delle perturbazioni causate dalla prima al più dopo un tempo $r/c$. Pertanto, vengono meno i presupposti su cui veniva enunciato il terzo principio, e la sua validità non può essere estesa alla formulazione relativistica. Tuttavia, due conseguenze importanti derivanti dal terzo principio, sono la conservazione del *tri-impulso* e del momento angolare, dunque è naturale domandarsi se tali quantità siano ancora costanti nel moto nel limite relativistico o ve ne siano comunque delle altre.

## 4.2 Quantità di moto

Ricordiamo la definizione della *quadrivelocità* in un sistema di riferimento $K$:

$$\begin{cases} u_0 = \gamma(v)c \\ \\ \vec{u} = \gamma(v)\vec{v} \end{cases} \tag{4.1}$$

con il parametro $\gamma$ dipendente esclusivamente dal modulo della velocità. In un sistema di riferimento $K'$ che si muove rispetto a $K$ con velocità $\beta$ lungo l'asse $\hat{x}$, la quadrivelocità $u_\mu$ era data dalle trasformazioni di

Lorentz:

$$\begin{cases} u_0' = \gamma(\beta)[u_0 + \beta u_x] \\ \\ u_x' = \gamma(\beta)[u_x + \beta u_0] \\ \\ u_y' = u_y \\ \\ u_z' = u_z \end{cases} \tag{4.2}$$

Supponiamo adesso di avere, in un sistema di riferimento $K_0$, un urto tra due particelle puntiformi di velocità iniziale uguale e di modulo $v$. Per la conservazione della quantità di moto

$$\vec{p}_{in} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \qquad \vec{p}_{fin} = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = 0 \tag{4.3}$$

Cerchiamo adesso di scrivere la quantità di moto nel caso generale, fermo restando che essa sia proporzionale alla velocità:

$$\vec{p} \stackrel{?}{=} f(v)\vec{v} \tag{4.4}$$

Il fattore di proporzionalità dev'essere funzione unicamente del modulo di $\vec{v}$, in quanto deve essere invariante per rotazione. Sappiamo che nel limite non relativistico

$$f(v \ll c) = m$$

dove $m$ è la quantità scalare chiamata *massa* del corpo. Inoltre, la funzione $f$ deve essere iniettiva. Assumiamo adesso che esista una *energia cinetica* $T(v)$, funzione scalare del modulo della velocità, anch'essa iniettiva, che si conserva, allora

$$T(v_1) + T(v_2) = T(v_1') + T(v_2') \qquad \text{se } v_1 = v_2 = v, v_1' = v_2' = v'$$

$$T(v) = T(v')$$

Nel sistema del centro di massa, l'urto può essere descritto dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} v_x^{1,2} = v_x^{1,2\prime} \\ \\ v_y^{1,2} = -v_y^{1,2\prime} \end{cases} \tag{4.5}$$

queste relazioni valgono per le trivelocità anche nel limite relativistico. In termini di quadrivelocità, otteniamo che il modulo delle componenti spaziali è lo stesso, dunque possiamo riscrivere la (4.4) come

$$\vec{p} = g(v)\vec{u} \tag{4.6}$$

in quanto $\vec{u} = \gamma(v)\vec{v}$. Dalla relazione $\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_y = 0$ segue che $|\Delta\vec{p}_1| = |\Delta\vec{p}_2|$, cioè

$$|\Delta p_1^y| = g(v_1)|\Delta u_1^y| \qquad |\Delta p_2^y| = g(v_2)|\Delta u_2^y|$$

sommando le relazioni ed imponendo che $\Delta u_1^y + \Delta u_2^y = 0$, troviamo che $g(v_1) = g(v_2)$. Questa relazione è valida in ogni sistema di riferimento inerziale, dunque $g(v_1) = g(v_2) = g(v)$ è una quantità costante, che denotiamo $m$. Dunque

$$g(v) = \frac{f(v)}{\gamma(v)} = m \Longrightarrow f = \gamma \cdot m$$

A questo punto, possiamo definire il *quadri-impulso* $p_\mu$ come $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$, o in altre parole:

$$\begin{cases} p_0 = mu_0 \\ \\ \vec{p} = m\vec{u} \end{cases} \tag{4.7}$$

Se si conserva il tri-impulso, cioè $\Delta\vec{p} = 0$, considero le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} \Delta p'_x = \gamma(\beta)[\Delta p_x + \beta \Delta p_0] \\ \\ \Delta p'_0 = \gamma(\beta)[\Delta p_0 + \beta \Delta p_x] \end{cases}$$

Se $\Delta p_x = 0$, allora essa sarà nulla in tutti i sistemi di riferimento inerziali, dunque si avrà anche $\Delta p'_x = 0$, e dalla prima trasformazione, segue che anche $\Delta p_0 = 0$. Il secondo membro della seconda trasformazione è identicamente nullo, dunque sarà anche $\Delta p'_0 = 0$. Concludiamo che se il tri-impulso si conserva, allora si conserverà anche la componente $p_0$ del quadri-impulso. Vediamo dunque cosa essa rappresenta. Dalla definizione di quantità di modo appena data:

$$p_0 = m\gamma c = mc \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

nel limite non relativistico $\dfrac{v}{c} \ll 1$ si ottiene, sviluppando in serie di Taylor:

$$= \frac{1}{c} mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \cdots\right) = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots\right)$$

In termini del problema delle due particelle di massa $m_1$ e $m_2$ e velocità $v_1$ e $v_2$ ciò comporta:

$$m_1 c^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_2 c^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_1 c^2 + \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + m_2 c^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2$$

cioè

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2$$

che è esattamente la legge di conservazione dell'energia cinetica nel limite non relativistico. Concludiamo dunque che la componente $p_0$ rappresenta l'energia cinetica del sistema, e, generalizzando quanto visto, possiamo asserire che energia e tri-impulso sono le componenti di un quadrivettore denominato *quadri-impulso*. Possiamo dunque scrivere l'impulso nella formulazione relativistica:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma\vec{v} \tag{4.8}$$

dove $m$ è un quadri-scalare. Da questa formula, appare che, all'aumentare della velocità della particella, aumenti proporzionalmente anche la sua massa, cioè $m\gamma = m(v)$. In tal caso, sarebbe giustificato il valore di $c$ come limite superiore di propagazione di un evento.

## 4.3 Secondo principio

Nella formulazione di Newton, ricordiamo, il secondo principio era dato da

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{4.9}$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

con $\vec{p}$ dato dalla (4.8). Nel caso di moto unidimensionale con dato iniziale nullo, e assumendo che la massa sia invariante, abbiamo:

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = \frac{F}{m} = g \Longleftrightarrow \gamma v = gt$$

Sostituendo l'espressione di $\gamma$ otteniamo:

$$v = \frac{gt}{\gamma} = \frac{gt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

elevando al quadrato e dividendo per $c^2$ ambo i membri ottieniamo:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{gt}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ricavando da questa relazione il valore di $v/c$, si ha

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{(gt/c)^2}{1 + (gt/c)^2} \tag{4.10}$$

trattandosi di quantità sempre positive, possiamo osservare che dalla (4.10) segue che $\frac{v}{c}$ è sempre minore di uno, che è in accordo con quanto precedentemente detto. Ricavando infine la velocità $v$:

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}}$$

otteniamo che la linea d'universo descritta dalla particella è un'iperbole.
Consideriamo adesso il seguente esempio: in un certo sistema di riferimento, un blocco di massa $M$ è in quiete e due corpi puntiformi, ciascuno di massa $m$ si avvicinando ad esso con velocità uguali e opposte, rispettivamente $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ dirette lungo l'asse $\hat{y}$. L'urto è anaelastico. Allora, per la legge di conservazione della quantità di moto della meccanica classica, si ha:

$$M \cdot 0 + m(u_x + u_y) = 0 = (M + 2m) \cdot 0$$

Questa relazione deve valere in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
Consideriamo adesso un secondo sistema di riferimento, in moto rispetto al primo con velocità uniforme $\vec{v}$ diretta lungo l'asse $\hat{x}$. Allora, il blocco sarà visto in movimento con velocità $\vec{v}$ e le particelle avranno velocità $\vec{u} + \vec{v}$ e $-\vec{u} + \vec{v}$. Lungo l'asse $\hat{y}$ vale la relazione descritta nel caso precedente, mentre lungo l'asse $\hat{x}$ si ha:

$$(M + 2m)v = (M + 2m)v' \Longrightarrow v = v'$$

anche in questo caso, la velocità del blocco rimane immutata lungo gli assi e quindi viene rispettato il principio di conservazione della quantità di moto.
Adesso consideriamo il blocco in quiete e mandiamo contro di esso due impulsi luminosi $\epsilon/c$. In questo caso, il blocco assorbirà gli impulsi e rimarrà fermo, in accordo con il principio classico. Se adesso diamo a tutti gli elementi una velocità lungo $\hat{x}$ $\vec{v}$ e indichiamo con $\alpha$ l'angolo compreso tra la direzione degli impulsi e $\vec{v}$, sfruttando la relatività, otteniamo la seguente relazione:

$$M\gamma v + 2\frac{\epsilon'}{c}\sin\alpha = M\gamma_f v_f$$

Questa relazione sembra violare il principio di relatività, in quanto $v_f \neq v$. Questo è un assurdo nato dall'aver assunto che la massa del blocco rimanesse costante nell'evoluzione dell'evento. Imponendo che $v_f = v$, la relazione si modifica in

$$M\gamma v + 2\frac{\epsilon'}{c}\sin\alpha = M_f\gamma v \Longleftrightarrow (M_f - M)\gamma v = 2\frac{\epsilon'}{c}\sin\alpha$$

Il seno dell'angolo $\alpha$ corrisponde al rapporto $v/c$, per cui

$$(M_f - M)\gamma v = \frac{2\epsilon'}{c}\frac{v}{c} \Longleftrightarrow \Delta(M\gamma c^2) = 2\epsilon' = \Delta E_{luce}$$

con la condizione

$$\frac{\epsilon'}{\gamma} = \epsilon$$

In conclusione, siamo in grado di preservare la conservazione dell'impulso e dell'energia solo se ammettiamo che la massa non rimanga costante. A questo punto, emerge ancora più chiaramente, nell'equivalenza massa-energia, che l'energia abbia un ruolo primitivo rispetto alla massa. In virtù di queste considerazioni, vogliamo adesso fornire un'espressione del quadri-impulso indipendente dalla massa, ma solamente dall'energia.

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{E}{c} = m\gamma c \\ \\ \vec{p} = m\gamma\vec{v} \end{cases} \iff \frac{\vec{p}}{E/c^2} = \vec{v} \tag{4.11}$$

Allora definiamo il quadri-impulso come

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{4.12}$$

Adesso consideriamo la quantità $p_\mu p_\mu$. Con la nuova definizione si ha

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{E}{c^2}$$

dove si è usata la definizione del prodotto scalare di Minkowski. Usando invece la definizione che coinvolge la quadrivelocità, si ha

$$p_\mu p_\mu = m^2 u_\mu u_\mu = -(mc)^2$$

Uguagliando le due espressioni, otteniamo la *relazione energia-impulso*:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \iff E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{4.13}$$

dove la quantità $mc^2$ è detta *massa a riposo*. Notiamo che questa relazione fornisce una relazione riguardante il quadrato dell'energia, quindi bisogna stare attenti a considerare il doppio segno quando si estrae la radice.

**Esempio 1** (Effetto Compton)**.**
Consideriamo un fotone con quadri-impulso dato da

$$k_\mu = \hbar\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \tag{4.14}$$

Abbiamo che $k^2 = 0$, il che implica che siamo sul bordo del cono-luce. Trattandosi di un fotone, la cosa ha senso. Ricordando la definizione di quadri-impulso appena data

$$p_\mu = (E, \vec{p}) \implies p^2 = m^2$$

L'effetto fotoelettrico, d'altra parte, ci garantisce che

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{cases} \tag{4.15}$$

Se adesso consideriamo un elettrone "fermo", verso cui mandiamo il fotone di impulso $k_\mu$ e lunghezza d'onda $\lambda$, dopo l'assorbimento seguirà un'emissione, che risulterà inclinata di un angolo $\theta$ rispetto alla direzione iniziale e con una lunghezza d'onda $\lambda' \neq \lambda$, e dunque con impulso $k' \neq k$. Imponiamo la conservazione dell'energia sugli indici zero dei quadri-impulsi:

$$\hbar\omega + m = \hbar\omega' + E' \iff E' - m = \hbar(\omega - \omega') \tag{4.16}$$

poiché deve essere $\omega - \omega' > 0$, da questa relazione otteniamo che la lunghezza d'onda $\lambda'$ è maggiore di quella iniziale. Sugli indici 1,2,3 del quadri-impulso imponiamo che

$$\hbar(k - k') = p' - p$$

elevando al quadrato si ottiene:

$$\hbar^2(-2kk') = 2m^2 - pp' \Longleftrightarrow \hbar^2 kk' = pp' - m^2 =$$

poiché la quantità $pp'$ è invariante per trasformazione di Lorentz, ne consideriamo solo la componente zero:

$$= m(E' - m)$$

In conclusione, otteniamo la relazione

$$\hbar^2\omega'\omega(1 - \cos\theta) = m(E' - m) \tag{4.17}$$

Mettendo a sistema le equazioni (4.16) e (4.17) otteniamo la relazione

$$\lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{mc}(1 - \cos\theta), \qquad \text{con } \frac{\hbar}{mc} = 0,024 \text{ Å} \tag{4.18}$$

Inoltre, dopo alcuni passaggi algebrici, otteniamo un'altra relazione:

$$\lambda E = hc \tag{4.19}$$

che ci consente di capire che per registrare variazioni bisogna usare lunghezze d'onda sufficientemente piccole.

Vogliamo adesso fare qualche considerazione sul momento angolare $\vec{L}$. Sappiamo che $\vec{L}$ può essere interpretato come un tensore antisimmetrico tale che

$$\epsilon_{ijk}L_k = x_i p_j - x_j p_i$$

In $\mathbb{M}^4$ estendiamo questo concetto considerando un tensore antisimmetrico $F_{\mu\nu}$ e introducendo il simbolo $\epsilon$ a quattro indici $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$. Applicando il simbolo al tensore si ha

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} = \hat{F}_{\alpha\beta} \tag{4.20}$$

otteniamo dunque un tensore a due indici antisimmetrico, detto il *duale* di $F$. Se avevevamo completato il tri-impulso con l'energia, possiamo completare le tre componenti del momento angolare (che ricordiamo sono i generatori delle rotazioni) inserendole in un tensore antisimmetrico insieme ai generatori del gruppo di Lorentz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 \\ -\mathcal{L}_1 & 0 & L_3 & -L_2 \\ -\mathcal{L}_2 & -L_3 & 0 & L_1 \\ -\mathcal{L}_3 & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo definire dunque il *tensore momento angolare* $M_{\mu\nu}$:

$$M_{\mu\nu} := \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}x_\alpha p_\beta \tag{4.21}$$

Poiché $M_{\mu\nu}$ è antisimmetrico, avrà sei componenti linearmente indipendenti, tre che generano le rotazioni e tre che generano i boost di Lorentz. Questo tensore si conserva.

## 4.4 Forze

In analogia con il secondo principio:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$$

derivando il quadri-impulso rispetto al tempo proprio otteniamo qualcosa di simile a una quadri-forza

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \equiv G_\mu = \frac{dp_\mu}{dt}\frac{d\tau}{dt} = \begin{cases} \gamma \frac{d}{dt}\frac{E}{c} = \frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} & \mu = 0 \\ \\ \gamma\vec{F} & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

Poiché $G_\mu$ è un quadrivettore, esso deve trasformare secondo le trasformazioni di Lorentz. Consideriamo un sistema di riferimento in cui una particella è a riposo, e scriviamo $G_\mu$:

$$G_\mu^{rest} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}^{rest} \end{pmatrix}$$

Se invece osservo la particella in un sistema di riferimento in moto relativo con velocità $\vec{v}$ lungo l'asse $\hat{x}$, allora $G_\mu$ sarà dato da:

$$G_\mu^v = \begin{pmatrix} \gamma\vec{F}\cdot\vec{v}/c \\ \gamma\vec{F} \end{pmatrix}$$

Queste due quantità saranno interconnesse da una trasformazione di Lorentz:

$$G_x^v = \gamma F_x^v = \gamma(F_x^{rest} + v\cdot 0) = \gamma F_x^{rest}$$
$$G_y^v = \gamma F_y^v = G_y^v = G_y^{rest} = F_y^{rest}$$

Quindi, indicando con $F_{||}$ la componente parallela al boost e con $F_\perp$ quelle ortogonali, otteniamo le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} F_{||}^v = F_{||}^{rest} \\ \\ F_\perp^v = \frac{1}{\gamma}F_\perp^{rest} \end{cases} \tag{4.22}$$

Allora il secondo principio covariante diventa:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = m\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = \vec{F}$$

Esplicitando la derivata:

$$m\gamma\vec{a} + m\vec{v}\frac{d}{dt}\gamma = \vec{F}$$

Si ha che

$$\frac{d}{dt}[(1-v^2/c^2)^{-1/2}] = -\frac{1}{2}\frac{2\vec{v}\cdot\vec{a}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

dunque otteniamo:

$$m\gamma\vec{a} + m\vec{v}\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} = \vec{F}$$

Proiettando tutto nelle direzioni longitudinali ed ortogonali:

$$\begin{cases} (m\gamma)\vec{a}_\perp = \vec{F}_\perp \\ \\ m\gamma a_{||} + mv\gamma\frac{va_{||}}{c^2} = ma_{||}\gamma\left[1 + \frac{v^2}{c^2}(1-v^2/c^2)^{-1/2}\right] = ma_{||}\gamma^3 = F_{||} \end{cases}$$

La prima relazione implica che $m(v) \equiv m\gamma$, mentre la seconda implica invece $m(v) = m\gamma^3$. Poiché sono contradditorie, non vale la pena considerarle e conviene dunque tenersi la massa come uno scalare.

# Capitolo 5

# Meccanica analitica e relatività

In meccanica analitica, l'azione $W$ era definita da

$$W = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}[q(t), \dot{q}(t)]\, dt \tag{5.1}$$

dove $\mathcal{L}$ è la funzione, detta *Lagrangiana*, tale che $\delta W = 0$ e soddisfacente a tal fine le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

In analogia col caso analitico, vogliamo scrivere l'azione per una particella libera in ambito relativistico:

$$W := -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} d\tau = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{\gamma} = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Poniamo dunque $\mathcal{L}(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Verifichiamo se questa è una buona definizione:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = m\gamma v = p$$

$$\frac{d}{dt} p = 0$$

Quindi è consistente. Scriviamo adesso l'energia:

$$E = pv - \mathcal{L} = pv + \frac{mc^2}{\gamma} = m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = m\gamma \left( v^2 + \frac{c^2}{v^2} \right) = m\gamma c^2$$

Eliminando la dipendenza esplicita dalla velocità, cioè esprimendo l'energia in funzione dell'impulso, otteniamo la funzione *Hamiltoniana* $\mathcal{H}(p, q)$:

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Per una carica in presenza di campo elettromagnetico, abbiamo

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} + q \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - V(\vec{r}, t) \right) \tag{5.2}$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{c^2 \left[ \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + m^2c^4} + qV(\vec{r}, t) \tag{5.3}$$

# Capitolo 6

# Esercizi

**Esercizio 1.**
Supponiamo di avere una particella in un sistema di riferimento $K$ con velocità $\vec{v}$ e con velocità $\vec{v}'$ in un secondo sistema di riferimento $K'$, in velocità relativa $u$ rispetto a $K$. Associo a $\vec{v}, \vec{v}'$ le loro corrispondenti quadrivelocità $\widetilde{v}$ e $\widetilde{v}'$. Dimostrare che la legge di composizione delle velocità è uguale (sia per i trivettori, che per i quadrivettori).

Le trasformazioni di Lorentz sono date da

$$\begin{cases} dt' = \gamma_u(dt + udx) \\ \\ dx' = \gamma_u(dx + udt) \end{cases} \tag{6.1}$$

con $v = \dfrac{dx}{dt}$ e $v' = \dfrac{dx'}{dt'}$. Sostituendo:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx + udt}{dt + udx} = \frac{\frac{dx+udt}{dt}}{\frac{dt+udx}{dt}} = \frac{v+u}{1+uv}$$

Dunque

$$\widetilde{v}' = \begin{pmatrix} \gamma_{v'} \\ \gamma_{v'} v' \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo

$$\widetilde{v}' = \begin{pmatrix} \gamma_{v'} \\ \gamma_{v'} v' \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \gamma_u & \gamma_u u \\ \gamma_u u & \gamma_u \end{pmatrix}$$

Svolgendo i prodotti ed eguagliando componente per componente otteniamo:

$$\begin{cases} \gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v (1 + uv) \\ \\ \gamma_u \gamma_v (u + v) = \gamma_{v'} v' \end{cases}$$

Elevando al quadrato la prima equazione si ha

$$\gamma_{v'}^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{u+v}{1+uv}\right)^2} = \frac{(1+uv)^2}{(1+uv)^2 - (u+v)^2} = \frac{(1+uv)^2}{(1-u)(1-v)}$$

da cui semplificando otteniamo l'uguaglianza. La seconda equazione è banalmente vera perché segue direttamente dalla legge di composizione delle velocità, quindi le leggi di composizione sono equivalenti.

**Esercizio 2.** Urto tra una particella di velocità $u$ e una parete che si avvicina con velocità $v$. Dire la velocità della particella dopo l'urto.

In un sistema di riferimento $K'$ in moto rispetto al primo con velocità $-\vec{v}$, la parete è in quiete. La velocità della particella in $K'$ sarà data da:

$$u' = \frac{u+v}{1+uv}$$

Dopo l'urto, la particella torna indietro con velocità $u'_f = -u'$. Ritornando adesso al sistema di riferimento $K$:

$$u_f = \frac{u'_f - v}{1 - u'_f v} = \frac{-u' - v}{1 + u'v} = -\left(\frac{\frac{u+v}{1+uv} + v}{1 + \frac{u+v}{1+uv} \cdot v}\right) = -\frac{u + 2v + uv^2}{1 + 2uv + v^2}$$

Questa formula è consistente, infatti se $u = 1$ (cioè la particella è un fotone), sostituendo nella relazione trovata otteniamo $u_f = -1$, cioè il fotone viene riflesso con velocità di modulo invariato (infatti la velocità della luce è costante) di segno opposto.

**Esercizio 3.** Stesso problema del precedente, ma le velocità $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono collineari e formano un angolo $\alpha$.

Poiché $\vec{u} \equiv (u_x \cos\alpha, u_y \cos\alpha)$, si ha $\tan\alpha = \dfrac{u_y}{u_x}$. Dopo l'urto, la particella formerà un angolo $\alpha_f$ con la normale alla superficie dato da

$$\tan\alpha_f = \frac{u_{fy}}{u_{fx}}$$

La quadrivelocità è $\widetilde{u} \equiv (\gamma(u), \gamma(u)u_x, \gamma(u)u_y)$. Possiamo dunque definire gli angoli di incidenza e di riflessione in termini della quadrivelocità:

$$\tan\alpha = \frac{\widetilde{u}_y}{\widetilde{u}_x}$$

$$\tan\alpha_f = \frac{\widetilde{u}_{fy}}{\widetilde{u}_{fx}}$$

In termini matriciali:

$$\widetilde{u}_f = L^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L\, \widetilde{u} = L^{-1} R L\, \widetilde{u}$$

La matrice di Lorentz indotta dalla trasformazione è

$$L = \begin{pmatrix} \gamma(v) & \gamma(v)v & 0 \\ \gamma(v)v & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{u}_f = \begin{pmatrix} \gamma(u_f) \\ \gamma u_{fx} \\ \gamma u_{fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)v & 0 \\ -\gamma(v)v & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(v) & \gamma(v)v & 0 \\ \gamma(v)v & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui, eseguendo i prodotti righe per colonne, si ha

$$\widetilde{u}_f = \gamma^2(v) \begin{pmatrix} 1+v^2 & 2v & 0 \\ -2v & -(1+v^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) \\ \gamma(u)u_x \\ \gamma(u)u_y \end{pmatrix}$$

e dunque scrivendo le componenti di $\widetilde{u}_f$ possiamo ricavare l'angolo di rifrazione:

$$\tan\alpha_f = -\frac{1}{\gamma^2(v)} \frac{\sin\alpha}{(1+v^2)\cos\alpha + 2\frac{v}{u}}$$

Se la parete è ferma, $v = 0$ e si ha $\tan\alpha = \tan\alpha_f$, coerente con la meccanica classica.

**Esercizio 4.** È possibile che un fotone "decada" in due fotoni con velocità formanti un angolo $\theta_{12}$?

Ad un fotone è associato un quadri-impulso $p(\gamma) = \hbar(\omega, \vec{\kappa})$. Allora, scrivendo la conservazione del quadri-impulso:

$$p = p_1 + p_2$$

Elevando al quadrato (e ricordando che il modulo del quadri-impulso di un fotone è zero):

$$p^2 = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 \Longleftrightarrow 0 = p_1 \cdot p_2 = -\omega_1\omega_2(\cos\theta_{12} - 1)$$

quindi la conservazione è rispettata se e solo se $\theta_{12} = 0$, cioè i due fotoni prodotti sono collineari.

**Esercizio 5.** Un protone e un neutrone formano uno stato legato denominato *deutone*. Il difetto di massa $B$ è dato da $B = M_p + M_n - M_d$. Per un protone e un neutrone $M_p = M_n = 940$ MeV e $B = 2.2$ MeV. Mostrare che la relazione $p + n \to d$ non è consistente con la conservazione del quadri-impulso.

Il quadri-impulso delle due particelle è rispettivamente dato da:

$$p_{1\mu} = (M_p\gamma, M_p\gamma\vec{v}), \qquad p_{2\mu} = (M_n\gamma, M_n\gamma\vec{v})$$

Ci poniamo nel sistema del centro di massa delle due particelle: il tri-impulso iniziale, così come quello finale, è zero, quindi bisogna scrivere la conservazione dell'energia (componente zero)

$$M_d = M_p\gamma(v) + M_n\gamma > M_p + M_n = B + M_d$$

da cui otteniamo $B < 0$, che contraddice l'ipotesi, dunque questa reazione è impossibile.

**Esercizio 6.** Consideriamo adesso la reazione $p + n \to d + \gamma$, dove $\gamma$ è un fotone e verifichiamone la consistenza con la conservazione del quadri-impulso.

Nel sistema del c.d.m.:

$$M_p\gamma(v_p) + M_n\gamma(v_n) = M_d\gamma(v_d) + E_\gamma$$

dove abbiamo considerato anche l'energia del fotone. Supponiamo adesso che $v_p, v_n \ll 1$. Osserviamo che in questo caso, per non violare la conservazione del tri-impulso, il deutone prodotto deve avere una velocità non nulla. Inoltre deve essere soddisfatta:

$$M_p\gamma(v_p)\vec{v}_p + M_n\gamma(v_n)\vec{v}_n = M_d\gamma(v_d)\vec{v}_d + \vec{p}$$

Possiamo condensare le due equazioni in una usando il quadri-impulso:

$$p_p + p_n = p_d + p_\gamma$$

Elevando questa al quadrato:

$$(M_p + M_n)^2 = (E_d + E_\gamma)^2$$

da cui otteniamo

$$M_p + M_n = \sqrt{p^2 + M_d^2} + p$$

Isolo la radice ed elevo al quadrato:

$$p^2 + M_d^2 = (M_n + M_p - p)^2 = M_n^2 + M_p^2 + p^2 + 2M_nM_p - 2M_np - 2M_pp$$

e quindi:

$$p = \frac{-M_d^2 + (M_n + M_p)^2}{2(M_n + M_p)} = \frac{(M_n + M_p + M_d)(M_n + M_p - M_d)}{2(M_n + M_p)} = B\frac{2(M_n + M_p) - B}{2(M_n + M_p)}$$

Concludiamo dunque che

$$|\vec{p}| = B\left(1 - \frac{B}{2(M_n + M_p)}\right)$$

Il rapporto è di una parte su $10^5$, dunque la differenza di massa $B$ viene quasi interamente assorbita dal fotone. Di conseguenza, il deutone prodotto ha una velocità quasi nulla (non totalmente nulla, altrimenti verrebbe violata la conservazione del tri-impulso).

**Esercizio 7.** Consideriamo la reazione $e^- + e^+ \to z_0$, con $m_0 \simeq 90$ GeV. Vogliamo sapere, in termini di energia, se nel sistema del laboratorio è meno dispendioso tenere fermo l'elettrone e spararvi contro il positrone, oppure accelerare entrambi.

Nel sistema del c.d.m. si ha $p_+ + p_- = p_0$. In termini di energia: $E_+ + E_- = E_0$ e poiché $E_+ = E_- = E$ si ha $2E = E_0$, e quindi $E \simeq 45$ GeV.
Nel sistema del laboratorio, invece, si ha

$$\begin{cases} E^+_{lab} + m_e = M_0\gamma(v_0) \\ \\ m\gamma(v_+)v_+ = M_0\gamma(v_0)v_0 \end{cases}$$

Riprendiamo la relazione dei quadri-impulsi e facciamone il quadrato:

$$p_+^2 + p_-^2 + 2p_+p_- = p_0^2 \Longleftrightarrow 2m_e^2 + 2E^+_{lab}m_e = M_0^2$$

da cui

$$E^+_{lab} = \frac{M_0^2 - 2m_e^2}{2m_e^2} = \frac{M_0}{2}\left(\frac{M_0}{m_e} - 2\frac{m_e}{M_0}\right) = \frac{M_0^2}{2m_e}\left(1 - 2\left(\frac{m_e}{M_0}\right)^2\right) \simeq 45 \cdot 10^4 \text{GeV}$$

quindi l'energia necessaria in questo caso è molto maggiore che nel caso precedente.

**Esercizio 8.** Consideriamo due particelle con quadri-impulsi

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1), \qquad p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$$

descriviamo nel caso più generale il centro di massa. La formula Newtoniana non è più applicabile in quanto presuppone la validità del terzo principio per sistemi isolati.

Il quadri-impulso totale del sistema è dato da

$$P = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

Posso sempre trovare un sistema di riferimento in cui la componente spaziale del quadri-impulso totale sia solo lungo $\hat{x}$, cioè:

$$P = (E_1 + E_2, (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_x, 0, 0)$$

e quindi, poiché l'impulso nel sistema del c.d.m. deve essere $P_{cm} = (E_1' + E_2', \vec{0})$, si ottiene

$$p_x' = \gamma(v)[(p_1 + p_2)_x - v(E_1 + E_2)] = 0$$

la velocità $\vec{v}$ sarà dunque data da:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{E_1 + E_2}$$

**Esercizio 9.** Consideriamo i decadimenti

$$B \to J/\Psi + K_0 \qquad\qquad K_0 \to \pi^+ + \pi^-$$

Calcolare l'energia di $K_0$.

$p_B - p_K = p_{J/\Psi}$, elevando al quadrato:

$$M_B^2 + M_K^2 - 2M_BE_K = M_{J/\Psi}^2$$

da cui:

$$E_K = \frac{M_B^2 + M_K^2 - M_{J/\Psi}^2}{2M_B}$$

e per l'impulso:

$$p_K^2 = E_K^2 - M_K^2 = \frac{(M_B^2 - M_K^2 - M_{J/\Psi}^2)^2}{4M_B^2}$$

cioè

$$p_K = \frac{M_B^2 - M_K^2 - M_{J/\Psi}^2}{2M_B}$$

$$v_K = \frac{p_K}{E_K} \ll 1$$