Analisi Matematica I-II

Appunti (non rivisti) delle lezioni del professor Carlo Viola

un progetto di

www.eigenlab.org

a cura di

Francesco Cicciarella

Note legali

Copyright © 2011-2012 di Francesco Cicciarella
Appunti di Analisi Matematica 1-2
è rilasciato sotto i termini della licenza
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia.
Per visionare una copia completa della licenza, visita
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode`

Liberatoria, mantenimento e segnalazione errori

Questo documento viene pubblicato, in formato elettronico, senza alcuna garanzia di correttezza del suo contenuto. Il testo, nella sua interezza, è opera di

`Francesco Cicciarella`
`<f[DOT]cicciarella[AT]inventati[DOT]org>`

e viene mantenuto dallo stesso, a cui possono essere inviate eventuali segnalazioni di errori.

Pisa, 10 Ottobre 2012

Indice

1 Logica **4**
1.1 Logica delle proposizioni . . . 4
1.1.1 Simbologia . . . 4
1.1.2 Connettivi . . . 4
1.1.3 Proprietà dei connettivi . . . 4
1.1.4 Connettivo condizionale . . . 5
1.1.5 Metodi di dimostrazione . . . 5
1.1.6 Coimplicazione logica (o doppia implicazione) . . . 5
1.1.7 Quantificatori . . . 5
1.2 Principio di induzione . . . 5

2 Coefficienti binomiali **6**
2.1 Definizione e proprietà . . . 6

3 Insiemi **9**
3.1 Applicazioni . . . 9
3.2 Gruppi . . . 9
3.3 Corpi . . . 10
3.4 Relazioni . . . 10
3.5 Insiemi numerici . . . 10
3.5.1 Naturali, interi, razionali . . . 10
3.5.2 Numeri reali - Definizione di Dedekind . . . 11
3.5.3 Numeri complessi - definizione non rigorosa . . . 11
3.5.4 Numeri complessi - definizione rigorosa . . . 12
3.5.5 Rappresentazione dei numeri complessi in coordinate polari . . . 12

4 Geometria analitica **14**
4.1 Richiami . . . 14
4.2 Coniche . . . 15
4.2.1 Parabola . . . 15
4.2.2 Ellisse . . . 16
4.2.3 Iperbole . . . 17

5 Successioni e limiti **20**
5.1 Successioni numeriche . . . 20
5.2 Limiti e proprietà . . . 21
5.3 Teorema di Bolzano-Weierstrass . . . 23
5.4 Successioni di Cauchy . . . 24

6 Funzioni continue **26**
6.1 Definizione . . . 26
6.2 Teoremi sulle funzioni continue . . . 27
6.3 Uniforme continuità . . . 28
6.4 Lipschitzianità . . . 29

7 Derivate **30**
7.1 Definizione . . . 30
7.2 Differenziale . . . 30
7.3 Operazioni con le derivate . . . 31
7.4 Crescenza e decrescenza . . . 32
7.5 Massimi e minimi . . . 33
7.6 Teoremi sulle funzioni derivabili . . . 33
7.7 Teoremi di de l'Hôpital . . . 35
7.7.1 Caso finito . . . 35
7.7.2 Caso infinito . . . 36
7.8 Formula di Taylor . . . 37

8 Integrali definiti **40**
8.1 Definizione di Riemann . . . 40
8.2 Somme di Riemann . . . 43
8.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 44
8.4 Regola di integrazione per parti . . . 46
8.4.1 Per integrali indefiniti . . . 46
8.4.2 Per integrali definiti . . . 46
8.5 Regola di integrazione per sostituzione . . . 46
8.5.1 Per integrali indefiniti . . . 46
8.5.2 Per integrali definiti . . . 47
8.6 Criterio di convergenza di Cauchy per funzioni . . . 47
8.7 Successioni di funzioni . . . 49

9 Serie **51**
9.1 Serie numeriche . . . 51
9.2 Carattere delle serie . . . 51
9.3 Serie geometrica . . . 51
9.4 Criterio di convergenza di Cauchy per le serie . . . 52
9.5 Criteri di convergenza per serie a termini positivi . . . 53
9.5.1 Criterio del confronto . . . 53
9.5.2 Criterio del rapporto . . . 53
9.5.3 Criterio della radice . . . 53
9.5.4 Criterio dell'integrale . . . 54
9.6 Criterio di convergenza di Leibniz . . . 55
9.7 Riordinamento di una serie . . . 55
9.8 Serie somma . . . 57
9.9 Serie prodotto . . . 57
9.10 Serie di funzioni . . . 57
9.11 Serie di potenze . . . 60
9.12 Serie di MacLaurin . . . 62
9.13 Funzioni iperboliche . . . 63
9.13.1 Sviluppi di MacLaurin per seno e coseno iperbolici . . . 63
9.14 Teorema di Abel . . . 63

Capitolo 1

Logica

1.1 Logica delle proposizioni

La logica proposizionale è un linguaggio formale basato su una semplice scrittura sintattica, basata fondamentalmente su proposizioni elementari e su connettivi logici che restituiscono il valore di verità di una proposizione in base al valore di verità delle proposizioni connesse.

1.1.1 Simbologia

$$\wedge \rightarrow \text{ e} \qquad \vee \rightarrow \text{ o} \qquad \neg \rightarrow \text{ non}$$

Le proposizioni si indicano solitamente con le lettere maiuscole dell'alfabeto.

1.1.2 Connettivi

- $P \wedge Q$: è vera se sono vere entrambe P e Q;
- $P \vee Q$: è vera se è vera almeno una fra P e Q;
- $\neg P$: è vera se P è falsa, è falsa se P è vera;
- $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

1.1.3 Proprietà dei connettivi

1. Commutativa
   - $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
   - $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
2. Associativa
   - $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
   - $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
3. Distributiva
   - $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   - $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
4. Leggi di De Morgan
   - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
   - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

1.1.4 Connettivo condizionale

$$P \Rightarrow Q \quad (P \textit{ implica } Q)$$
$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

Q è vera se P $\Rightarrow$ Q e P è vera.

1.1.5 Metodi di dimostrazione

- Dimostrazione per assurdo I

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Dimostrazione.

$$\neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg Q) \vee \neg P$$
$$\neg P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee \neg P$$
$$\neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

□

Dimostrazione per assurdo II

$$P \wedge \neg Q \Rightarrow R \text{ (falsa), allora } \; P \Rightarrow Q$$

Dimostrazione.

$$P \wedge \neg Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \vee R$$

Ma R è falsa, dunque $\neg(P \wedge \neg Q)$ deve essere necessariamente vera. Allora

$$\neg(P \wedge \neg Q) \overset{DeMorgan}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee \neg(\neg Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$$

è vera. □

1.1.6 Coimplicazione logica (o doppia implicazione)

$$P \Leftrightarrow Q \quad (P \textit{ se e solo se } Q)$$

È equivalente a $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$

1.1.7 Quantificatori

- $\forall$: Quantificatore universale (per ogni...);
- $\exists$: Quantificatore esistenziale (esiste un...);
- $\exists!$: Quantificatore di esistenza ed unicità (esiste uno e un solo...).

Negazione dei quantificatori

Sia

$$P : \forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} \mid x + 2y = 0 \text{ (vero)}$$

Allora

$$\neg P : \exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} \text{ si ha } x + 2y \neq 0 \text{ (falso)}$$

1.2 Principio di induzione

Sia T_n una proposizione che si vuole dimostrare, dipendente da un intero positivo n. La dimostrazione per induzione si articola in due passaggi:

1. Dimostrare T_1;
2. Supponendo vero T_n per un certo n, dimostrare T_{n+1}.

Allora la proposizione sarà vera per ogni n.

Capitolo 2

Coefficienti binomiali

2.1 Definizione e proprietà

Definizione 2.1.1.
Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}^+$. Si definisce *coefficiente binomiale* di base α e classe k

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 \quad \text{se } k = 0 \\ \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{se } k > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.1 (Formula di Stiefel)**.** $\forall \alpha, k$

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$$

Dimostrazione. (k=0)

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} = 1 + \alpha = \binom{\alpha+1}{1}$$

□

Dimostrazione. ($k > 0$) Dalla definizione,

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\left(1 + \frac{\alpha-k}{k+1}\right) = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\left(\frac{\alpha+1}{k+1}\right) = \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k+1)!} = \binom{\alpha+1}{k+1} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.2 (Teorema binomiale)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione. (Per induzione su n)

($n = 0$) banale.
($n \Rightarrow n+1$)

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

Sfruttando l'ipotesi induttiva, si ha:

$$\begin{aligned}
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} =
\end{aligned}$$

Pongo nella seconda sommatoria $k+1 = h$:

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^{n-h+1}b^h =$$

Ripongo $h = k$ (è un indice muto, quindi il valore della sommatoria non cambia):

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k = \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + \binom{n}{n}b^{n+1} = \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n-k+1}b^k + \binom{n}{n}b^{n+1} =
\end{aligned}$$

Per la formula di Stiefel, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Inoltre, per le proprietà dei coefficienti binomiali, $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ e $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$. Dunque:

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.3 (Teorema multinomiale)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $\forall a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{R}$

$$(a_1 + \cdots + a_r)^n = \sum_{h_1+\cdots+h_r=n}\frac{n!}{h_1!\cdots h_r!}a_1^{h_1}\cdots a_r^{h_r}$$

Dimostrazione. (Per induzione su r)
$r = 1$ banalmente vero.
Proviamo che $r \Rightarrow r+1$

$$(a_1 + \cdots + a_r + a_{r+1})^n =$$

Pongo $a_1 + \cdots + a_r = B_r$. Allora, per il teorema binomiale, $(B_r + a_{r+1})^n$ diventa:

$$= (B_r + a_{r+1})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_r^k a_{r+1}^{n-k} =$$

Applico l'ipotesi induttiva a B_r^k:

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{h_1+\cdots+h_r=k} \frac{k!}{h_1!\cdots h_r!} a_1^{h_1} \cdots a_r^{h_r} a_{r+1}^{n-k} =$$

Pongo $n-k = h_{r+1}$:

$$\begin{aligned} &= \sum_{h_{r+1}=n}^{n} \frac{n!}{k!h_{r+1}!} \sum_{h_1+\cdots+h_{r+1}=n} \frac{k!}{h_1!\cdots h_r!} a_1^{h_1} \cdots a_{r+1}^{h_{r+1}} = \\ &= \sum_{h_1+\cdots+h_{r+1}=n} \frac{n!}{h_1!\cdots h_{r+1}!} a_1^{h_1} \cdots a_{r+1}^{h_{r+1}}. \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.1.1. $\forall k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n, \binom{n}{k}$ *è il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di n elementi.*

Dimostrazione. (Per induzione su n)

$n = 0, k = 0$ banalmente vero. Supponiamo vera la proposizione per un certo n e per ogni k, e la dimostriamo per $n+1$.

Sia A un insieme di $n+1$ elementi e sia $a \in A$. Allora:

- Il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di $n+1$ elementi contenenti a (fisso) è uguale al numero di sottoinsiemi di $k-1$ elementi in un insieme di n elementi. Per l'ipotesi induttiva, questo numero è esattamente $\binom{n}{k-1}$;
- Il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di $n+1$ elementi non contenenti a (fisso) è uguale al numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di n elementi. Per l'ipotesi induttiva, questo numero è esattamente $\binom{n}{k}$.

Allora il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di $n+1$ elementi sarà dato dalla somma dei numeri ottenuti, cioè

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Per la formula di Stiefel. □

Capitolo 3

Insiemi

3.1 Applicazioni

Definizione 3.1.1. Siano A, B due insiemi. Si definisce *applicazione* (o funzione) f di un insieme A in un insieme B, e si denota $f : A \to B$ una legge di corrispondenza che ad ogni elemento $a \in A$ associa uno e un solo elemento $b \in B$ legati dalla relazione $b = f(a)$.

Definizione 3.1.2. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* quando

$$\forall a_1, a_2 \in A \mid f(a_1) = f(a_2) \text{ si ha } a_1 = a_2$$

Definizione 3.1.3. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *surgettiva* quando

$$\forall b \in B \; \exists \; a \in A \mid b = f(a)$$

Definizione 3.1.4. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice *bigettiva* quando

$$\forall b \in B \; \exists! \; a \in A \mid b = f(a)$$

Osservazione 3.1.1. Un'applicazione è bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva.

3.2 Gruppi

Definizione 3.2.1. Sia G un insieme e * un'operazione. Si definisce *gruppo* l'insieme G munito dell'operazione *.

Un gruppo $(G, *)$ è quindi la coppia formata da un insieme G e un'operazione * in G del prodotto cartesiano $G \times G \to G$.

$$* : G \times G \to G$$

$$(a, b) \longmapsto a * b$$

$$\forall a, b \in G, (a * b) \in G$$

Cioè G è chiuso rispetto all'operazione. L'operazione * gode delle seguenti proprietà:

1. **Associatività**: $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$;
2. **Esistenza dell'elemento neutro**: $\exists e \in G \mid \forall a \in G \; a * e = e * a = a$;
3. **Esistenza dell'inverso**: $\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G \mid a * a{-}1 = a^{-1} * a = e$.

Osservazione 3.2.1. $(G, *)$ si dice gruppo *commutativo* (o abeliano) quando l'operazione è commutativa, cioè $\forall a, b \in G \; a * b = b * a$.

3.3 Corpi

Definizione 3.3.1. Sia $\mathbb{K}$ un insieme e $+, \cdot$ due operazioni nell'insieme. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ si definisce *corpo* se valgono le seguenti proprietà:

1. $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo commutativo con elemento neutro denotato 0 e inverso denotato $-a$);
2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo (non necessariamente commutativo) con elemento neutro denotato 1 e inverso denotato a^{-1};
3. L'operazione $\cdot$ è distributiva rispetto all'operazione $+$, cioè

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Osservazione 3.3.1. Se $(\mathbb{K}, \cdot)$ è un gruppo abeliano, allora $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un *corpo commutativo*, detto anche *campo*.

Proposizione 3.3.1 (Legge di annullamento del prodotto)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un corpo. Allora, $\forall a \in \mathbb{K}\ a \cdot 0 = 0$.*

Dimostrazione. $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, da cui segue, semplificando, $a \cdot 0 = 0$. □

3.4 Relazioni

Definizione 3.4.1. Sia A un insieme. Una *relazione* $\mathcal{R}$ in A è un sottoinsieme di $A \times A$. In particolare, una relazione è di *ordine* se gode delle seguenti proprietà:

1. **Riflessiva**: $\forall a \in A \quad a \mathcal{R} a$;
2. **Simmetrica**: $\forall a, b \in A \quad a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$;
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A \quad a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$.

   $\mathcal{R}$ è una relazione di *ordine totale* in A quando inoltre si ha:
4. $\forall a, b \in A$ almeno una delle proposizioni $a \mathcal{R} b, b \mathcal{R} a$ è vera.

3.5 Insiemi numerici

3.5.1 Naturali, interi, razionali

- **Naturali**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Interi**: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Razionali**: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2, b \neq 0 \text{ e con } (a, b) = (ka, kb)\ \forall k \in \mathbb{Z}^* \right\}$

Evidentemente, si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Osservazione 3.5.1. $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

Osservazione 3.5.2. $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ è un gruppo commutativo.

Osservazione 3.5.3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.

3.5.2 Numeri reali - Definizione di Dedekind

Definizione 3.5.1. Si definisce *sezione di* $\mathbb{Q}$ una qualunque coppia ordinata di insiemi (A, B) tale che:

- $A, B \subset \mathbb{Q}$;
- $A, B \neq \{0\}$;
- $A \cup B = \mathbb{Q}$;
- $\forall a \in A, \forall b \in B a < b, (\text{da cui } A \cap B = \{0\})$.

I numeri reali sono tutte le sezioni di $\mathbb{Q}$, cioè l'elemento di separazione tra gli elementi di classe A e quelli di classe B, quando A non presenta un massimo e B non presenta un minimo.

Definizione 3.5.2. Sia $a \in A \subset \mathbb{Q}$. Si dice che a è il *massimo* di A quando $\forall x \in A, x \leq a$.

Definizione 3.5.3. Sia $b \in B \subset \mathbb{Q}$. Si dice che b è il *minimo* di B quando $\forall y \in B, y \geq b$.

Le sezioni di $\mathbb{Q}$ si distinguono in tre categorie:

1. A presenta un massimo e B non ha minimo;
2. B presenta un minimo e A non ha massimo;
3. A non presenta un massimo e B non presenta un minimo.

Le sezioni si identificano rispettivamente con:

1. Il massimo di A;
2. Il minimo di B;
3. L'elemento di separazione tra A e B.

Definizione 3.5.4. Si definiscono *numeri irrazionali* le sezioni di $\mathbb{Q}$ del terzo tipo.

Osservazione 3.5.4. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrazionali}\}$.

3.5.3 Numeri complessi - definizione non rigorosa

Si consideri l'equazione di secondo grado a coefficienti reali

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le cui soluzioni sono date dalla formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.1}$$

Nel caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, allora $\Delta = -|\Delta|$. Posto allora

$$i := \sqrt{-1}$$

Le soluzioni saranno:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Da cui definiamo i *numeri complessi* i numeri nella forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

3.5.4 Numeri complessi - definizione rigorosa

$$\mathbb{C} = \{(a, b), \text{con } a, b \in \mathbb{R}\}$$

Definiamo su $\mathbb{C}$ una somma $+$ e un prodotto $\cdot$ dati da

- $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $(a, b), (c, d) \mapsto (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $(a, b), (c, d) \mapsto (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Osservazione 3.5.5. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Osservazione 3.5.6. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo non ordinato.

Definizione 3.5.5. Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

1. Si definisce *parte reale* di z
$$\Re(a + ib) = a$$
2. Si definisce *parte immaginaria* di z
$$\Im(a + ib) = b$$

Osservazione 3.5.7. $z \in \mathbb{C}$ è detto *immaginario puro* se $\Re(z) = 0$

Definizione 3.5.6. Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si definisce *coniugato* di z

$$\bar{z} = a - ib$$

Proprietà

- $\forall z \in \mathbb{C}\ z \cdot \bar{z} = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2$
- $\forall z \in \mathbb{C}\ z + \bar{z} = 2\Re(z) = 2\Re(\bar{z})$

Definizione 3.5.7. Sia $z \in \mathbb{C}$. Si definisce *modulo* (o valore assoluto) di z

$$|z| = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}$$

O equivalentemente, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Proprietà

- $\forall z, w \in \mathbb{C}, |z + w| \leq |z| + |w|$ (*diseguaglianza triangolare*)
- $\forall z, w \in \mathbb{C}, |z + w| \geq |z| - |w|$

3.5.5 Rappresentazione dei numeri complessi in coordinate polari

Considerando i numeri complessi come punti del piano, essi posso essere individuati univocamente tramite due parametri: il modulo e l'angolo che formano con l'asse reale (detto *argomento*). Si ha quindi, $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \rho = |z| \\ \theta = \arg z \end{cases}$$

Le corrispondenti coordinate cartesiane (x, y) saranno date dalle relazioni

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Da cui, poiché $z = x + iy$, si ha, $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \tag{3.2}$$

Proposizione 3.5.1. $\forall z, w \in \mathbb{C}$

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$

Dimostrazione. Siano $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \sigma(\cos\phi + i\sin\phi)$. Allora:

$$z \cdot w = \rho\sigma(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) =$$

$$\begin{aligned} &= \rho\sigma(\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi\cos\theta + i\sin\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) = \\ &= \rho\sigma((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta)) = \end{aligned}$$

Ma, per le formule di addizione di seno e coseno, si ha

$$\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta + \phi)$$

$$\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta = \sin(\theta + \phi)$$

Quindi si ha:

$$z \cdot w = \rho\sigma(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi))$$

□

Osservazione 3.5.8. Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \rho > 0$, allora

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{\rho}(cos\theta - i\sin\theta)$$

Proposizione 3.5.2 (Formula di De Moivre)**.** $\forall z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \tag{3.3}$$

Osservazione 3.5.9. Sia $z \in \mathbb{C}$ con modulo 1 e argomento θ. Allora:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta$$

Da cui:

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta\right) \\ \sin(n\theta) = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta\right) \end{cases}$$

Osservazione 3.5.10. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, l'equazione $z^n = \alpha$ ha esattamente n soluzioni $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, vertici dell' n-gono regolare iscritto nella circonferenza di centro O, raggio $\sqrt[n]{|\alpha|}$ e argomento $\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi)$ con $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Capitolo 4

Geometria analitica

4.1 Richiami

Fissato un sistema di rifierimento cartesiano $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, ogni punto P nello spazio tridimensionale è individuato univocamente da tre numeri, detti *coordinate* rispetto agli assi del sistema di riferimento fissato.

Distanza tra due punti

Definizione 4.1.1. Siano $P \equiv (a, b, c)$ e $Q \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ due punti nello spazio. Si definisce *distanza* tra P e Q il numero

$$\overline{PQ} = \sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2} \tag{4.1}$$

Circonferenza nel piano

Definizione 4.1.2. Sia $C \equiv (x_0, y_0)$ un punto fissato nel piano. Si definisce *circonferenza* di centro C e raggio r il luogo geometrico dei punti distanti r da C.

L'equazione della circonferenza di centro C e raggio r sarà pertanto:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{4.2}$$

Sfera nello spazio

Definizione 4.1.3. Sia $C \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto fissato nello spazio. Si definisce *sfera* di centro C e raggio r il luogo geometrico dei punti distanti r da C.

L'equazione della sfera di centro C e raggio r sarà pertanto:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{4.3}$$

Piano nello spazio

Definizione 4.1.4. Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto fissato nello spazio, $\underline{v} \equiv (a, b, c)$ un vettore avente un estremo in P_0. Si definisce *piano* il luogo geometrico dei punti $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio tali che $\underline{v} \cdot \underline{PP_0} = 0$.

L'equazione del piano si ricava eseguendo il prodotto scalare $\underline{v} \cdot \underline{PP_0}$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.4}$$

Oppure, in forma esplicita:

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ è il termine noto.

Definizione 4.1.5. 1. Siano $r : ax + by + c = 0$ e $s : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ due rette. r ed s si definiscono *parallele* se $\exists \lambda$ scalare tale che

$$\begin{cases} \alpha = \lambda a \\ \beta = \lambda b \end{cases}$$

2. r ed s si definiscono *ortogonali* se $a\alpha + b\beta = 0$.

Definizione 4.1.6. 1. Siano $\pi_1 : ax + by + cz + d = 0$ e $\pi_2 : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ due piani. π_1 e π_2 si definiscono *paralleli* se $\exists \lambda$ scalare tale che

$$\begin{cases} \alpha = \lambda a \\ \beta = \lambda b \\ \gamma = \lambda c \end{cases}$$

2. π_1 e π_2 si definiscono *ortogonali* se $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

4.2 Coniche

Con il termine conica si intende genericamente una curva piana che sia il luogo geometrico dei punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare retto con un piano. Vi sono tre tipi di coniche: *parabola, ellisse, iperbole.*

4.2.1 Parabola

Definizione 4.2.1. La *parabola* è il luogo geometrico dei punti del piano da un punto fisso detto *fuoco* e da una retta detta *direttrice.*

Equazione della parabola in coordinate polari

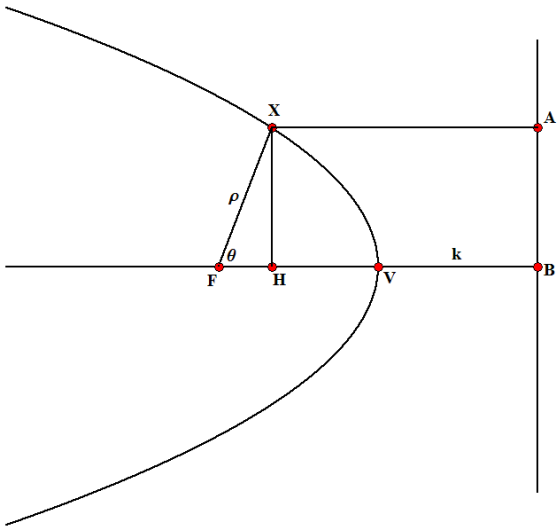

Figura 4.1: Parabola nel piano

$$FX = XA \qquad \rho = XA = HB = FB - FH$$

Ma $FH = \rho \cos\theta$ e $FB = FV + VB = 2VB = 2k = p$. Allora l'equazione diventa

$$\rho = p - \rho \cos\theta$$

da cui, risolvendo in funzione di ρ si ottiene:

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\theta}$$

Equazione della parabola in coordinate cartesiane

Assegnate al fuoco F coordinate (a, b), ricaviamo le quantità ρ e $\rho\cos\theta$ in coordinate cartesiane per un generico punto $P(x, y)$ appartenente alla parabola.

$$\rho = |PF| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \qquad \rho\cos\theta = b - y$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione in forma polare si ottiene:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = p - \rho - (b - y)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = p^2 + (b-y)^2 - 2p(b-y)$$

$$(x-a)^2 = p^2 - 2pb + 2py$$

Risolvendo in funzione di y si ha

$$y = \frac{(x-a)^2 + 2pb - p^2}{2p}$$

che con opportune posizioni, diventa:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

4.2.2 Ellisse

Definizione 4.2.2. L'*ellisse* è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi detti *fuochi* è costante.

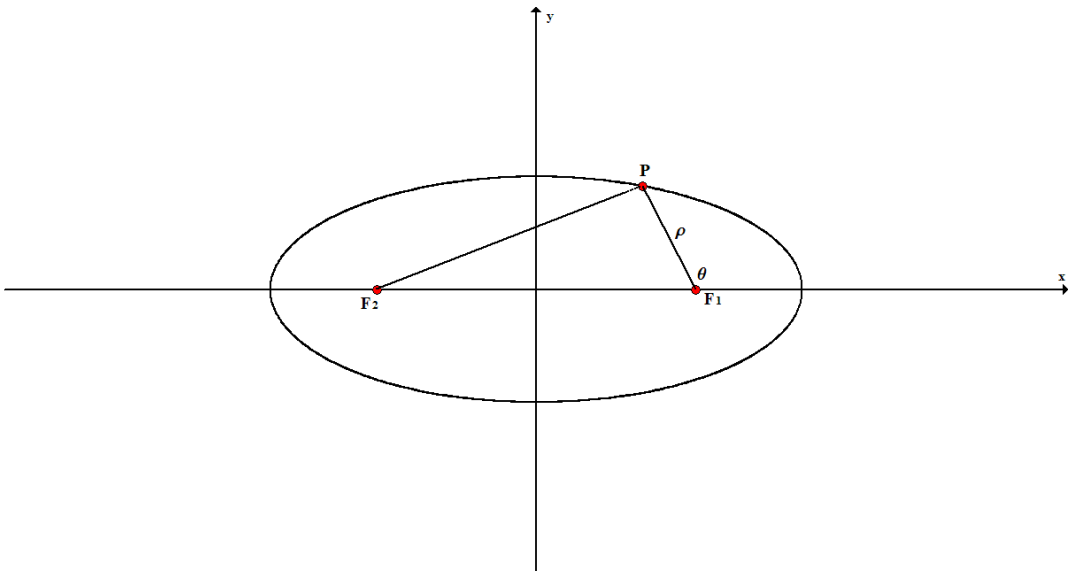

Figura 4.2: Ellisse nel piano

Equazione dell'ellisse in coordinate polari

$$PF_1 + PF_2 = 2a > 0 \text{ costante} \qquad PF_2 = \rho$$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo PF_1F_2:

$$PF_1^2 = F_1F_2^2 + F_2P^2 - 2PF_2 \cdot F_1F_2 \cos(\pi - \theta)$$

Posto $F_1F_2 = 2c > 0$ e ricordando che $PF_1 = 2a - \rho$, si ha

$$(2a - \rho)^2 = 4c^2 + \rho^2 + 4c\rho\cos\theta$$

$$4a^2 + \rho^2 - 4a\rho = 4c^2 + \rho^2 + 4cp\cos\theta$$

$$c^2 + c\rho\cos\theta = a^2 - a\rho \Longleftrightarrow a\rho + c\rho\cos\theta = a^2 - c^2$$

Pongo $a^2 - c^2 = b^2$ e risolvo in funzione di ρ:

$$\rho = \frac{b^2}{a + c\cos\theta}$$

Divido numeratore e denominatore per a. Posti

$$p = \frac{b^2}{a} \qquad e = \frac{c}{a}$$

l'equazione diventa

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{con } \ 0 < e < 1$$

Equazione dell'ellisse in coordinate cartesiane

Assegnate ai fuochi coordinate $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ si ha, per un generico punto $P(x, y)$ appartenente all'ellisse:

$$\rho = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \qquad \rho\cos\theta = x - c$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione polare, si ottiene

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = b^2 - c(x - c) \Longleftrightarrow a^2(x - c)^2 + a^2y^2 = b^4 - 2b^2c(x - c) + c^2(x - c)^2$$

$$(a^2 - c^2)(x - c)^2 + a^2y^2 = b^4 - 2b^2cx + 2b^2c^2$$

Sostituendo $a^2 - b^2 = c^2$ e sviluppando il quadrato

$$b^2x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 + a^2y^2 = b^4 - 2b^2cx + 2b^2c^2 \Longleftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = b^2(b^2 + c^2)$$

Ma, se $a^2 - c^2 = b^2$ allora $b^2 + c^2 = a^2$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividendo tutto per a^2b^2 si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione canonica di un ellisse riferita al centro e agli assi con i fuochi sull'asse $\vec{x}$ avente semiassi maggiore e minore rispettivamente di lunghezza a e b.

4.2.3 Iperbole

Definizione 4.2.3. L'*iperbole* è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi detti *fuochi* è costante.

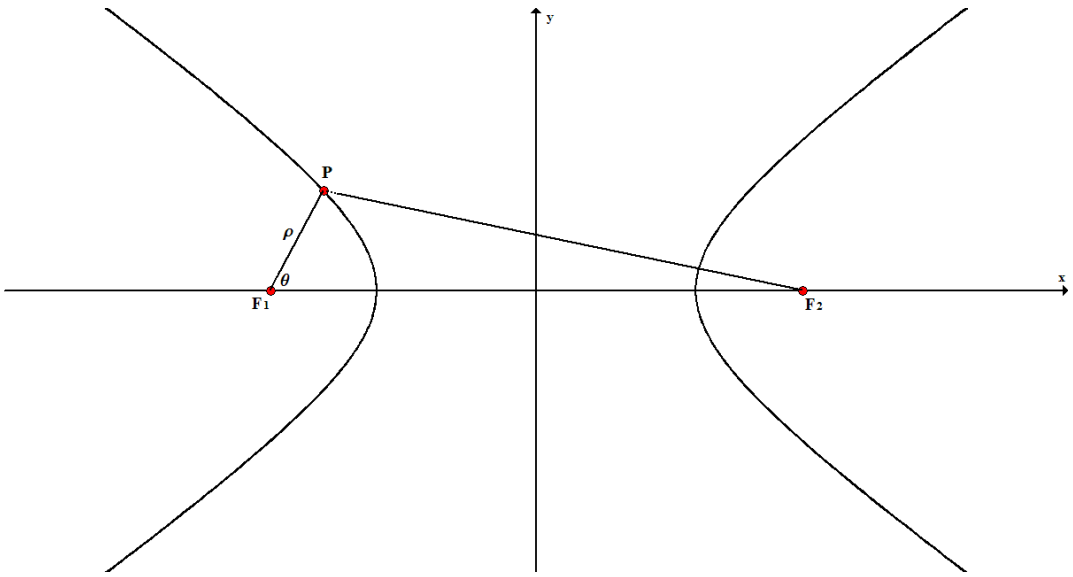

Figura 4.3: Iperbole nel piano

Equazione dell'iperbole in coordinate polari

$$|XA - XB| = 2a > 0 \text{ costante} \qquad AB = 2c > 0 \qquad XA = \rho$$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo AXB si ha

$$XB^2 = XA^2 + AB^2 - 2XA \cdot AB \cos\theta$$

cioè

$$(2a + \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho\cos\theta$$
$$4a^2 + 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho\cos\theta$$

Eliminando i termini opposti e dividendo per 4 si ottiene

$$a^2 + a\rho = c^2 - c\rho\cos\theta$$

Risolvendo in funzione di ρ si ha

$$\rho = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\theta}$$

Posti

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad \frac{b^2}{a} = p \qquad \frac{c}{a} = e$$

l'equazione dell'iperbole diventa

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{con } e > 1$$

Equazione dell'iperbole in coordinate cartesiane

Assegnate ai fuochi le coordinate $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, si ha, per un generico punto $P(-x, y)$ appartenente al ramo sinistro dell' iperbole (il ragionamento è analogo per il ramo destro scambiando i segni):

$$\rho = \sqrt{(c - x)^2 + y^2} \qquad \rho\cos\theta = c - x$$

Sostituendo le due espressioni nell'equazione polare, si ha

$$a\sqrt{(c - x)^2 + y^2} = b^2 - c(c - x) \Longleftrightarrow a^2(c - x)^2 + a^2y^2 = b^4 - 2b^2c(c - x) + c^2(c - x)^2$$
$$-b^2(c - x)^2 + a^2y^2 = b^4 - 2b^2c^2 + 2b^2cx \Leftrightarrow -b^2x^2 + 2b^2cx - b^2c^2 = b^4 - 2b^2c^2 + 2b^2cx$$

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = b^2(b^2 - c^2)$$

Ma se $c^2 - a^2 = b^2$ allora $b^2 - c^2 = -a^2$. Dunque sostituendo si ha

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

Dividendo tutto per $-a^2b^2$ si ottiene infine

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione canonica di un'iperbole riferita al centro e agli assi, con i fuochi sull'asse $\vec{x}$ e avente semiassi maggiore e minore rispettivamente di lunghezza a e b.

Capitolo 5

Successioni e limiti

5.1 Successioni numeriche

Definizione 5.1.1. Una *successione* di elementi di un dato insieme A è un'applicazione dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ in A:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

L'elemento a_n della successione è dunque l'immagine $a_n = f(n)$ del numero n tramite l'applicazione f. Se $A = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, si parlerà di *successioni numeriche.*

Definizione 5.1.2. Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$.

- Si dice che A è *superiormente limitato* se $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \; a \leq M$;
- Si dice che A è *inferiormente limitato* se $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \; a \geq m$.

In particolare, M è definito *maggiorante* per A, m è definito *minorante* per A.

Definizione 5.1.3. Sia A un insieme, E l'insieme dei maggioranti per A, F l'insieme dei minoranti per A.

- Si definisce *estremo superiore* di A e si denota $\sup A$ il minimo dell'insieme E;
- Si definisce *estremo inferiore* di A e si dentoa $\inf A$ il massimo dell'insieme F.

Osservazione 5.1.1. Se $\lambda = \sup A$, allora $\forall \epsilon > 0 \; \exists \bar{n}$ tale che $a_{\bar{n}} > \lambda - \epsilon$. Ragionamento analogo per l'estremo inferiore.

Definizione 5.1.4. Sia a_n una successione a termini reali o complessi e $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Si dice che λ è *limite* della successione (o che a_n *tende* a λ, e si denota

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lambda$$

se $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \forall n > n_0, |a_n - \lambda| < \epsilon$.

Definizione 5.1.5. Sia a_n una successione a termini reali o complessi e $\mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Si dice che μ è *punto limite* della successione se $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_1 < n_2 < \ldots$ tali che $|a_{n_k} - \mu| < \epsilon, (k = 1, 2, \ldots)$.

Osservazione 5.1.2. Se μ è punto limite di una successione a_n, allora $\exists \{a_{n_k}\}$ sottosuccessione che tende a μ.

Osservazione 5.1.3. Se una successione ammette limite finito, allora tutte le sue sottosuccessioni tendono allo stesso limite.

Definizione 5.1.6. Una successione a_n si definisce *monotona crescente (decrescente)* se $\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n \Rightarrow a_m \leq a_n \; (a_m \geq a_n)$

Teorema 5.1.1 (Regolarità delle successioni monotone)**.**
Ogni successione monotona di numeri reali ammette limite (finito o infinito).

Dimostrazione. Sia a_n una successione di numeri reali generalmente crescente e sia $\lambda = \sup\{a_n\}$. Per definizione di estremo superiore,

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \lambda - \epsilon < a_{n_0}$$

Poiché la successione è monotona crescente, $\forall n > n_0 \; a_{n_0} \leq a_n$. Inoltre, sempre per definizione di estremo superiore, $\forall n, a_n \leq \lambda$. Allora si ha:

$$\lambda - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \lambda \Rightarrow \lambda - \epsilon < a_n \leq \lambda$$

Da cui segue che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lambda$$

□

5.2 Limiti e proprietà

Teorema 5.2.1 (Unicità del limite)**.** *Sia a_n una successione di numeri reali che ammette limite λ_1. Allora il limite è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists \lambda_2 \neq \lambda_1$ tale che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lambda_2$. Supponiamo inoltre che $\lambda_1 < \lambda_2$. Allora si avrà che, $\forall \epsilon > 0$:

- $\exists n_1 \mid \forall n > n_1, \quad |a_n - \lambda_1| < \epsilon \Leftrightarrow \lambda_1 - \epsilon < a_n < \lambda_1 + \epsilon$;
- $\exists n_2 \mid \forall n > n_2, \quad |a_n - \lambda_2| < \epsilon \Leftrightarrow \lambda_2 - \epsilon < a_n < \lambda_2 + \epsilon$.

Posto $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ avrò, $\forall n > n_0$:

$$\lambda_2 - \epsilon < a_n < \lambda_1 + \epsilon$$

Poiché tale relazione è valida per ogni scelta di ϵ, fisso $\epsilon = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} > 0$, ottenendo che:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} < a_n < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

Cioè a_n è costante, il che contraddice l'ipotesi che la successione tenda a limite λ_1. La tesi pertanto risulterà essere vera. □

Teorema 5.2.2 (Teorema del confronto)**.** *Siano a_n, b_n, c_n tre successioni a termini reali tali che esiste un indice n_0 per cui*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$\forall n > n_0$ e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = \lambda \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lambda$$

Dimostrazione. Per ipotesi, $\forall \epsilon > 0$

- $\exists n_1 \mid \forall n > n_1 \quad \lambda - \epsilon < a_n < \lambda + \epsilon$;
- $\exists n_2 \mid \forall n > n_2 \quad \lambda - \epsilon < c_n < \lambda + \epsilon$.

Posto $\bar{n} = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ si avrà, $\forall n > \bar{n}$

$$\lambda - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \lambda + \epsilon$$

Da cui

$$\lambda - \epsilon < b_n < \lambda + \epsilon$$

□

Teorema 5.2.3 (Somma di limiti)**.** *Siano a_n, b_n due successioni di numeri reali o complessi tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \mid \forall n > n_0, |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$.

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$$

Per ipotesi,

- $\exists n_1 \mid \forall n > n_1, |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$
- $\exists n_2 \mid \forall n > n_2, |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$

Posto $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, avrò, $\forall n > n_0$:

$$|a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Osservazione 5.2.1. L'operatore lim è lineare.

Teorema 5.2.4. *Siano a_n, b_n due successioni di numeri reali o complessi tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha\beta$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \mid \forall n > n_0$,
$|(a_n \cdot b_n) - (\alpha\beta)| < \epsilon$.

$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n - \alpha\beta + a_n\beta - a_n\beta| = |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \leq$$

$$\leq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|$$

Per ipotesi,

- $\exists n_1 \mid \forall n > n_1 \quad |a_n| > \frac{|\alpha|}{2}$;
- $\exists n_2 \mid \forall n > n_2 \quad |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2|\beta|}$;
- $\exists n_3 \mid \forall n > n_3 \quad |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}$.

Posto $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, avrò, $\forall n > n_0$:

$$|a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}\frac{\epsilon}{|\alpha|} + |\beta|\frac{\epsilon}{2|\beta|} = \epsilon$$

□

Teorema 5.2.5. *Sia a_n una successione a termini reali o complessi tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \neq 0$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \mid \forall n > n_0 \quad |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| < \epsilon$.

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|\alpha - a_n|}{|a_n||\alpha|}$$

Per ipotesi,

- $\exists n_1 \mid \forall n > n_1 \quad |a_n| > \frac{|\alpha|}{2}$;
- $\exists n_2 \mid \forall n > n_2 \quad |a_n - \alpha| < \epsilon \frac{|\alpha|^2}{2}$.

Posto $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, avrò, $\forall n > n_0$:

$$\frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} < \frac{\epsilon \frac{|\alpha|^2}{2}}{\frac{|\alpha|^2}{2}} = \epsilon$$

□

5.3 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Lemma 5.3.1 (Intervalli incapsulati)**.** *Sia $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ una successione di intervalli chiusi, limitati e incapsulati. Allora esiste $x \in \mathbb{R}$ contenuto in tutti gli intervalli.*

Dimostrazione. Notiamo che $\forall m, n \quad a_m \leq b_n$. Se $m = n$ è ovvio. Se $m < n$ allora $a_m \leq a_n \leq b_n$ perché la successione a_i è monotona non decrescente. Analogamente si dimostra il caso $m > n$.

Sia $x = \sup\{a_n\}$. Esiste finito in quanto l'insieme delle a_n è maggiorato da qualunque b_i, dunque esisterà il più piccolo dei maggioranti. Allora, per ogni n:

- $a_n \leq x$ perché x è un maggiorante per la successione a_n;
- $x \leq b_n$ perché x è il più piccolo maggiorante.

Allora segue che $\forall n \quad a_n \leq x \leq b_n$ cioè $x \in [a_n, b_n]$. □

Teorema 5.3.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Ogni successione limitata di punti di $\mathbb{R}^N$ contiene una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Poniamo innanzitutto $N = 1$ (non è restrittivo). Sia x_n una successione contenuta in un intervallo $[a, b]$ compatto. Sia c il punto medio dell'intervallo. Almeno uno degli intervalli $[a, c], [c, b]$ contiene x_n per infiniti indici; considero tale intervallo e itero il procedimento di suddivisione infinite volte. Si ottiene così una successione infinita di intervalli incapsulati. Per il lemma 5.3.1, esiste un punto x appartenente a tutti gli intervalli. Si ha dunque

$$x = sup\{a_1, a_2, \dots\} = \inf\{b_1, b_2, \dots\}.$$

Allora, $\forall \epsilon > 0\ \exists N \mid a_N > x - \epsilon \quad b_N < x + \epsilon$, ossia $[a_N, b_N] \subset [x - \epsilon, x + \epsilon]$. Ma per costruzione, esistono infiniti indici $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tali che

$$\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\} \in [a_N, b_N] \subset [x - \epsilon, x + \epsilon]$$

Da cui si deduce che la sottosuccessione x_{n_k} tende a x. □

Proposizione 5.3.1. *Una successione limitata di punti di $\mathbb{R}^N$ tende a limite x se e solo se x è l'unico punto limite della successione.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) già vista (cfr. Osservazione 5.1.3).

($\Leftarrow$) Fissato $\epsilon > 0$, dimostro che $\exists n_0 \mid d(x_n, x) < \epsilon$. Se per assurdo n_0 non esistesse, allora esisterebbero infiniti indici $n_1 < n_2 < \dots$ tali che $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ non appartengano all'intorno di x di raggio ϵ. Per il teorema 5.3.1, tale sottosuccessione ammetterebbe un punto limite y diverso da x, che sarebbe anche punto limite della successione di partenza. Ma ciò contraddice l'ipotesi che x sia l'unico punto limite della successione, e quindi è un assurdo. La tesi risulterà pertanto vera. □

5.4 Successioni di Cauchy

Definizione 5.4.1. Sia x_n una successione di punti di $\mathbb{R}^N$. La successione si definisce *successione di Cauchy* quando

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \forall m, n > n_0 \qquad d(x_m, x_n) < \epsilon \tag{5.1}$$

Osservazione 5.4.1. Se una successione è di Cauchy, allora è limitata.

Dimostrazione. Fissato $\epsilon = 1$ allora, $\exists n_0 \mid \forall m, n > n_0$ tale che

$$d(x_m, x_n) < 1$$

In particolare, scegliendo $m = n_0 + 1$, abbiamo che $\forall n > n_0$

$$d(x_n, x_{n_0+1}) < 1$$

Posto $R = \max\{1, d(x_1, x_{n_0+1}), d(x_2, x_{n_0+1}), \ldots, d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\}$, ne segue che tutta la successione è contenuta nella sfera di centro x_{n_0+1} e raggio R, dunque è limitata. □

Teorema 5.4.1 (Criterio di convergenza di Cauchy)**.** *Una successione x_n di punti di $\mathbb{R}^N$ converge se e solo se è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Per ipotesi, $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \forall n > n_0 \qquad d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$.
Presi $m, n > n_0$, si ha dunque:

- $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$
- $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$

Allora, per la diseguaglianza triangolare:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

($\Leftarrow$) Per ipotesi la successione è di Cauchy, dunque per l'osservazione 5.4.1 è limitata. Allora, per il teorema 5.3.1, esiste una sottosuccessione $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ che ammette limite x.
Poiché x_n è di Cauchy, $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \forall n, m > n_0 \qquad d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$
Inoltre, poiché x_{n_k} tende a x, $\exists k_0 \mid \forall k > k_0 \qquad d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$.

Sia $n_1 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$ e sia $n_{k_1} > n_1$. Si avrà dunque, $\forall n > n_1$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Definizione 5.4.2. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme e $x_0 \in \mathbb{R}^N$, non necessariamente appartenente ad A. Si dice che x_0 è *punto d'accumulazione* per A se $\forall I(x_0) \; \exists x \in A \mid x \in I(x_0), x \neq x_0$.
Dove $I(x_0)$ denota un qualunque intorno del punto x_0.

Proposizione 5.4.1. *Sia $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}^N$ una successione limitata di punti di $\mathbb{R}^N$ e sia $E \subset \mathbb{R}^N$ l'insieme di tutti i punti limite della successione. Se y è un punto d'accumulazione per E, allora $y \in E$, cioè è punto limite della successione*

Dimostrazione. Scelto $\epsilon > 0$, sia $x_0 \in E$ tale che $d(x_0, y) < \epsilon$. Sia $\eta > 0$ tale che $0 < \eta < \epsilon - d(x_0, y)$. Poiché x_0 è punto limite della successione, esistono infiniti indici $n_1 < n_2 < \ldots$ tali che $d(x_{n_k}, x_0) < \eta (k = 1, 2, \ldots)$. Allora:

$$d(x_{n_k}, y) \leq d(x_{n_k}, x_0) + d(x_0, y) < \eta + \epsilon - \eta = \epsilon$$

Dunque y è punto limite della successione. □

Definizione 5.4.3. Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice *chiuso* quando ogni punto di accumulazione per E appartiene ad E.

Proposizione 5.4.2. *Sia $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ una successione di numeri reali limitata. Allora l'insieme E dei punti limite della successione ha un massimo e un minimo.*

Dimostrazione. Sia $\lambda = \sup E$. Poiché E è chiuso, λ deve appartenere ad E, in quanto altrimenti sarebbe un punto d'accumulazione esterno ad un insieme chiuso, il che è assurdo. Allora $\lambda \in E$ e dunque $\lambda = \max E$. Analoga dimostrazione per il minimo. $\square$

Definizione 5.4.4. Sia $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ una successione di numeri reali.

- Si definisce *massimo limite* della successione, e si indica $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ il massimo dei punti limite della successione.
- Si definisce *minimo limite* della successione, e si indica $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ il minimo dei punti limite della successione.

Capitolo 6

Funzioni continue

6.1 Definizione

Definizione 6.1.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita in $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto d'accumulazione per A. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

Quando $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A \; x \neq x_0 \; |x - x_0| < \; \delta$ si ha

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon$$

Definizione 6.1.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita su $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto d'accumulazione per A. Si dice che f è *continua* in x_0 quando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

f inoltre si dice continua su A quando è continua in tutti i punti di A.

Proposizione 6.1.1 (Limite per successioni)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 punto d'accumulazione per A. Allora si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ se e solo se per ogni successione $x_n \in A$ tendente a x_0, si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lambda$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Fisso $\epsilon > 0$. Bisogna dimostrare che $\exists n_0 \mid \forall n > n_0$ tale che

$$|f(x_n) - \lambda| < \epsilon$$

Per ipotesi,

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta, \qquad |f(x) - \lambda| < \epsilon \tag{6.1}$$

Poiché, comunque presa, la successione x_n tende a x_0, allora $\exists n_0 \mid \forall n > n_0, \quad |x_n - x_0| < \delta$. Dunque la successione x_n soddisfa (6.1) $\forall n > n_0$. Dunque si avrà

$$|f(x_n) - \lambda| < \epsilon$$

($\Leftarrow$) Suppongo per assurdo che $\exists \epsilon^* > 0$ tale che $\forall \delta > 0 \; \exists x \in A, \; x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$ tale che si abbia

$$|f(x) - \lambda| \geq \epsilon^*$$

Scelgo una qualunque successione δ_n a termini positivi tendente a zero. Allora, per costruzione $\forall n \; \exists x_n \in A, \; x_n \neq x_0$ soddisfacente $|x_n - x_0| < \delta$ e $|f(x_n) - \lambda| \geq \epsilon^*$.
Da $\delta_n \to 0$ e $|x_n - x_0| < \delta_n$ segue che $x_n \to x_0$. Per ipotesi ho $f(x_n) \to \lambda$ per ogni successione x_n tendente a x_0. Ma ciò contraddice l'ipotesi che $|f(x_n) - \lambda| \geq \epsilon^*$. Si è giunti pertanto ad un assurdo e quindi la tesi risulterà essere vera. □

Definizione 6.1.3 (Continuità per successioni)**.** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ punto d'accumulazione per A. Allora f è continua in x_0 se e solo se per ogni successione $x_n \in A$ tendente a x_0 si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

6.2 Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 6.2.1 (Weierstrass)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua in un insieme compatto A. Allora f ammette massimo e minimo in A.*

Dimostrazione. Sia $\lambda = \sup\{f(A)\}$. Sia $y_1, y_2, \ldots$ una qualunque successione tendente a λ, con $y_n < \lambda \; \forall n$.
Per definizione di estremo superiore, y_n non è un maggiorante per $f(A)$. Quindi $\forall n \; \exists x_n \in A \mid y_n < f(x_n) \leq \lambda$.
Per il teorema del confronto, poiché $y_n \to \lambda$ e $\lambda \to \lambda$, si avrà che $f(x_n) \to \lambda$.
Dato che $x_n \in A$ limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, la successione x_n deve contenere una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un punto x_0. Poiché A è anche chiuso, si ha $x_0 \in A$. Siccome f è continua in A, sarà continua anche in x_0, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Questo implica, per la continuità per successioni

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Avendo dimostrato precedentemente che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lambda$, ogni sottosuccessione deve tendere necessariamente allo stesso limite, dunque

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lambda$$

Per l'unicità del limite, risulta pertanto

$$\lambda = f(x_0)$$

E quindi, $\lambda = \sup\{f(A)\} \in A$, da cui segue $\lambda = \max\{f(A)\}$. (La dimostrazione per il minimo è del tutto analoga). □

Teorema 6.2.2 (Permanenza del segno)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita in un intervallo $A \subset \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto d'accumulazione per A tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

Allora esiste un intorno δ del punto x_0 in cui la funzione mantiene lo stesso segno di λ.

Dimostrazione. Per definizione di limite, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in A, x \neq x_0$ soddisfacente $|x - x_0| < \delta$ si abbia

$$|f(x) - \lambda| < \epsilon \Leftrightarrow \lambda - \epsilon < f(x) < \lambda + \epsilon \tag{6.2}$$

Fissato $\epsilon = |\lambda|$ si ha:

- Se $\lambda < 0$ allora $|\lambda| = -\lambda$ e, dalla seconda diseguaglianza della (6.2) si ha $f(x) < 0$;
- Se $\lambda > 0$ allora $|\lambda| = \lambda$ e, dalla prima diseguaglianza della (6.2) si ha $f(x) > 0$.

□

Teorema 6.2.3 (Esistenza degli zeri delle funzioni continue)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua in un intervallo A. Siano $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$. Allora $\exists x_0 \in]x_1, x_2[\mid f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Sia I l'insieme dei punti $x \in [x_1, x_2]$ tali che $f(x) > 0$ e sia $x_0 = \sup I$. Bisogna dimostrare che $f(x_0) = 0$.

Se fosse $f(x_0) > 0$, per il teorema 6.2.2, esisterebbero dei punti $x > x_0$ tali che $f(x) > 0$, cioè appartenenti ad I. Il che è assurdo in quanto x_0 è un maggiorante per I. Se invece fosse $f(x_0) < 0$, per il teorema 6.2.2, esisterebbe un punto $\xi_0 < x_0$ tale che $f(x) < 0 \; \forall x \in [\xi_0, x_0]$. Ma allora ξ_0 sarebbe un maggiorante per I minore di $x_0 = \sup I$, che per definizione è il più piccolo dei maggioranti. Quindi anche questo caso è assurdo. Poiché $f(x_0)$ non può essere né positiva né negativa, dato che f è comunque definita in x_0, ne segue che $f(x_0) = 0$. □

Teorema 6.2.4 (Esistenza dei valori intermedi)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua in un intervallo A. Dati due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in A$, con $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall \lambda \in [f(x_1), f(x_2)]$ $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che $f(x_0) = \lambda$.*

Dimostrazione. $\forall x \in A$ definisco $g(x) = f(x) - \lambda$. g è continua in A perché somma di funzioni continue. Si ha inoltre

- $g(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$
- $g(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$

Allora, per il teorema 6.2.3, $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) - \lambda = 0$ da cui $f(x_0) = \lambda$. □

6.3 Uniforme continuità

Definizione 6.3.1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *uniformemente continua* in A quando

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x_1, x_2 \in A \text{ soddisfacenti } d(x_1, x_2) < \delta$$

si abbia

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Teorema 6.3.1 (Heine-Cantor)**.** *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in un insieme A compatto, allora f è uniformemente continua in A.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists \epsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ $\exists x, \xi \in A$ soddisfacenti $d(x, \xi) < \delta$, per i quali

$$|f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon \tag{6.3}$$

Sia d_n una successione a termini positivi tendente a zero. Allora, $\forall n$ $\exists x_n, \xi_n \in A$ tali che

$$d(x_n, \xi_n) < \delta_n \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(\xi_n)| \geq \epsilon$$

Poiche $x_n \in A$ compatto, per il teorema 5.3.1, la successione $x_1, x_2, \ldots$ contiene necessariamente una sottosuccessione $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ convergente ad un punto $x_0 \in A$. Allora la sottosuccessione $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots$ deve convergere allo stesso punto x_0. Infatti, fissato $\eta > 0$ $\exists n_0 \mid \forall n > n_0 \quad \delta_n < \frac{\eta}{2}$. Poiché $x_{n_k} \to x_0$, $\exists k_0 \mid \forall k > k_0 \quad d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\eta}{2}$.
Detto $k_1 > k_0$ un intero tale che $\forall k > k_1$ si abbia $n_k > n_0$ si ha, se $k > k_1$:

- $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\eta}{2}$
- $d(x_{n_k}, \xi_{n_k}) < \delta_{n_k} < \frac{\eta}{2}$

Allora, per la diseguaglianza triangolare:

$$d(\xi_{n_k}, x_0) \leq d(\xi_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$$

Dunque $\xi_{n_k} \to x_0$ per $k \to +\infty$. Poiché f è continua in x_0 per ipotesi, abbiamo, per la continuità per successioni:

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to +\infty} f(\xi_{n_k}) = f(x_0)$$

Da cui segue che

$$\lim_{k \to +\infty} (f(x_{n_k} - f(\xi_{n_k})) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

Che contraddice la 6.3. Si è dunque giunti ad un assurdo; la tesi risulterà pertanto essere vera. □

6.4 Lipschitzianità

Definizione 6.4.1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* in A quando

$$\exists L > 0 \text{ costante } \mid \forall x_1, x_2 \in A \text{ si abbia } \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

Teorema 6.4.1. *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è lipschitziana in A, allora è uniformemente continua in A.*

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$, poniamo $\delta = \frac{\epsilon}{L} > 0$. Allora, se $d(x_1, x_2) < \delta$ abbiamo

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot d(x_1, x_2) < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

□

Capitolo 7

Derivate

7.1 Definizione

Definizione 7.1.1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ intervallo e sia $x_0 \in]a, b[$. Si definisce *derivata prima* della funzione f nel punto x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{7.1}$$

e si denota con $f'(x_0)$, $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$, $[D(f(x))]_{x_0}$

Teorema 7.1.1. *Se una funzione f è derivabile in un punto x_0, allora è continua in x_0.*

Dimostrazione.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \Delta f = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Da cui:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Che è la definizione di continuità in x_0. □

7.2 Differenziale

Definizione 7.2.1. Sia f una funzione derivabile in un punto x_0. Si definisce *differenziale* di f in x_0

$$(df)_{x_0} = f'(x_0)(x - x_0)$$

Teorema 7.2.1. *Sia f una funzione derivabile in un punto x_0. Allora lo scarto fra il differenziale $(df)_{x_0}$ e l'incremento Δf è infinitesimo di ordine superiore a $\Delta x = x - x_0$.*

Dimostrazione.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) \to 0$$

Ovvero la quantità $\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)$ è un infinitesimo $\epsilon(\Delta x)$. Allora

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon(\Delta x) \Leftrightarrow \Delta f = f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x$$

Ma

- $f'(x_0)\Delta x = (df)_{x_0}$

- $\epsilon(\Delta x)\Delta x$ è ancora un infinitesimo di Δx, $\epsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$

Da queste considerazioni segue che

$$\Delta f - (df)_{x_0} = o(\Delta x)$$

□

Osservazione 7.2.1. Se $f(x) = x$, allora $dx = f'(x)\Delta x = \Delta x$. Quindi, in generale, se $y = f(x)$ si ha

$$(df) = f'(x)\Delta x = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$$

7.3 Operazioni con le derivate

Proposizione 7.3.1. *Siano f e g due funzioni derivabili in un punto x_0. Allora $f(x)+g(x)$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$D(f(x) + g(x))_{x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

□

Proposizione 7.3.2. *Sia f derivabile in un punto x_0 e sia c una costante. Allora $cf(x)$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$D(cf(x))_{x_0} = c \cdot f'(x_0)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = cf'(x_0)$$

□

Osservazione 7.3.1. L'operatore derivata è un operatore lineare.

Proposizione 7.3.3. *Siano f, g due funzioni derivabili in un punto x_0. Allora $f(x)g(x)$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$D(f(x)g(x))_{x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

Aggiungo e sottraggo al numeratore la quantità $f(x)g(x_0)$:

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

Ricordando che, per il teorema 7.1.1, una funzione derivabile è anche continua, si ottiene:

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

□

Proposizione 7.3.4. *Sia f derivabile in un punto x_0 tale che $f(x_0) \neq 0$. Allora $\frac{1}{f(x)}$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right)_{x_0} = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)} =$$

$$= -\frac{1}{f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

□

Proposizione 7.3.5. *Siano f, g due funzioni derivabili in un punto x_0, con $g(x_0) \neq 0$. Allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)_{x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Dimostrazione.

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)_{x_0} = D\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)_{x_0} =$$

Per le proposizioni 7.3.3 e 7.3.4 si ha

$$= D(f(x))_{x_0} \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot D\left(\frac{1}{g(x)}\right)_{x_0} = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

□

Teorema 7.3.1 (Leibniz)**.** *Siano f, g due funzioni derivabili in un punto x_0. Allora, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$D^n(f(x)g(x))_{x_0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0)g^{(k)}(x_0)$$

La dimostrazione di questo teorema, a meno di adattamenti, è del tutto analoga a quella del teorema 2.1.2.

7.4 Crescenza e decrescenza

In un punto

Definizione 7.4.1. Una funzione f si definisce *crescente* (risp. *decrescente* in un punto x_0 quando

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[& f(x) < f(x_0) \text{ (risp. } f(x) > f(x_0)) \\ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta] & f(x) > f(x_0) \text{ (risp. } f(x) < f(x_0)) \end{cases}$$

In un intervallo

Definizione 7.4.2. Una funzione f si definisce *crescente* (risp. *decrescente*) in un intervallo $[a, b]$ quando

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \mid x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (risp. } f(x_1) > f(x_2))$$

Teorema 7.4.1. *Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 tale che $f'(x_0) > 0$ [risp. $f'(x_0) < 0$]. Allora f è crescente [risp. decrescente] in x_0.*

Dimostrazione. Per ipotesi, $\exists \delta > 0 \mid \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Si ha dunque:

- $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0[$ si ha $x - x_0 < 0$ e ciò implica $f(x) - f(x_0) < 0$
- $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$ si ha $x - x_0 > 0$ e ciò implica $f(x) - f(x_0) > 0$

Che è esattamente la definizione di crescenza in x_0. Analoga dimostrazione per $f'(x_0) < 0$ e la decrescenza. □

7.5 Massimi e minimi

Definizione 7.5.1. Una funzione f ha un *massimo locale* in un punto x_0 quando $\exists \delta > 0 \mid \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.

Definizione 7.5.2. Una funzione f ha un *minimo locale* in un punto x_0 quando $\exists \delta > 0 \mid \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Proposizione 7.5.1. *Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$; sia x_0 un punto di massimo (o minimo) locale per f. Allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Per assurdo, se fosse $f'(x_0) > 0$, allora f sarebbe crescente in x_0 e dunque

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[& f(x) < f(x_0) \\ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta] & f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

Ma la seconda diseguaglianza contraddice l'ipotesi che x_0 sia un punto di massimo locale per f. Quindi è un assurdo. Se invece fosse $f'(x_0) < 0$, allora f sarebbe decrescente in x_0 e dunque

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \delta, x_0[& f(x) > f(x_0) \\ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta] & f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Ma la prima diseguaglianza contraddice l'ipotesi che x_0 sia un punto di massimo locale per f. Quindi è un assurdo. Non potendo essere né $f'(x_0) > 0$ né $f'(x_0) < 0$, si deduce che $f'(x_0) = 0$. □

7.6 Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema 7.6.1 (Rolle)**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ tale che $f(a) = f(b)$. Allora $\exists x_0 \in]a, b[\mid f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Per il teorema 6.2.1, $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ che sono punti di massimo e minimo assoluti per f. Sia dunque $f(x_1) = m$ (minimo) e $f(x_2) = M$ (massimo). Distinguiamo due casi:

1. Sia x_1 che x_2 cadono agli estremi dell'intervallo ($x_1 = a, x_2 = b$). Si ha dunque $m = f(x_1) = f(a) = f(b) = f(x_2) = M$, cioè la funzione è costante in $[a, b]$ e pertanto, per definizione, $f'(x) = 0 \forall x \in]a, b[$.

2. Almeno uno fra x_1 e x_2 appartiene ad $]a, b[$. Supponiamo $x_1 \in]a, b[$. x_1 è punto di minimo assoluto per f, e quindi anche locale. Poiché appartiene ad $]a, b[$, per definizione di minimo locale si avrà $f'(x_1) = 0$.

□

Teorema 7.6.2 (Cauchy)**.** *Siano f, g due funzioni continue in un intervallo $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora $\exists x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$(g(b) - g(a))f'(x_0) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$$

Dimostrazione. $\forall x \in [a, b]$ definisco $F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - g(x)(f(b) - f(a))$. Osservo che

- F è continua in $[a, b]$ perché somma di funzioni continue in $[a, b]$;
- F è derivabile in $]a, b[$ perché somma di funzioni derivabili in $]a, b[$;
- $F(a) = g(b)f(a) - g(a)f(b) = F(b)$.

Dunque sono soddisfatte le ipotesi del teorema 7.6.1. Di conseguenza,

$$\exists x_0 \in]a, b[\mid F'(x_0) = 0$$

Cioè:

$$(g(b) - g(a))f'(x_0) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$$

□

Teorema 7.6.3 (Lagrange)**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora $\exists x_0 \in]a, b[$ tale che*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione. Sia $g(x) = x$, continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora, per il teorema 7.6.2 applicato a f e g, $\exists x_0 \in]a, b[$ tale che

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = f'(x_0)(g(b) - g(a))$$

Ma $g'(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}, g(b) = b, g(a) = a$. Sostituendo, si ottiene

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a) \iff f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollario 7.6.3.1. *Sia f continua in $[a.b]$ e derivabile in $]a, b[$ tale che $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a, b[$. Allora f è crescente in $[a, b]$.*

Dimostrazione. $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$ si ha che f è continua in $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ e derivabile in $]x_1, x_2[\subset]a, b[$. Allora, per il teorema 7.6.3, $\exists x_0 \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Poiché $x_2 - x_1 > 0$, segue immediatamente che $f(x_2) > f(x_1)$. □

Corollario 7.6.3.2. *Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a, b[$, allora f è costante in $[a, b]$*

Dimostrazione. $\forall x_1, x \in]a, b[$ si ha che f è continua in $[x_1, x] \subset [a, b]$ e derivabile in $]x_1, x[\subset]a, b[$. Allora, per il teorema 7.6.3, $\exists x_0 \in]x_1, x[$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = 0$$

Da cui segue che $f(x) = f(x_1)$. Fissato x_1, facendo variare x in $[a, b]$ risulterà che f è costante e vale $f(x_1)$. □

Definizione 7.6.1. Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Si dice che una funzione F è una *primitiva* di f in $[a, b]$ se

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Corollario 7.6.3.3. *Siano F, G due primitive di una funzione f in un intervallo $[a, b]$. Allora $G(x)-F(x)$ è costante.*

Dimostrazione. $\forall x \in]a, b[$

$$D(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Poiché $G(x) - F(x)$ ha derivata nulla $\forall x \in]a, b[$, per il corollario 7.6.3.2 segue che $G(x) - F(x)$ è costante in $[a, b]$. □

Proposizione 7.6.1. *Sia $y = f(x)$ derivabile in un intervallo $]a, b[$, con $f'(x) > 0$ $\forall x \in]a, b[$, dunque strettamente monotona e di conseguenza invertibile in $[a, b]$, e sia $]m, M[= f(]a, b[)$. Siano $x_0 \in]a, b[$ e $y_0 = f(x_0) \in]m, M[$. Allora $x = f^{-1}(y)$ è derivabile in $]m, M[$ e si ha*

$$D(f^{-1}(y))_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione.

$$D(f^{-1}(y))_{y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Proposizione 7.6.2. *Siano g una funzione derivabile in un intervallo $]a, b[$ e f una funzione derivabile in $]m, M[= g(]a, b[)$. Allora $f(g(x))$ è derivabile in $]a.b[$ e si ha*

$$D(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

Dimostrazione. Poniamo $y = g(x)$ e $\Delta y = g(x) - g(x_0)$. Allora

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

Per il teorema 7.2.1, $\Delta f = df + \epsilon(\Delta y)$, quindi

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{df + \epsilon(\Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(y)\Delta y + \epsilon(\Delta y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f'(y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\epsilon(\Delta y)}{\Delta x} = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} =$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

□

7.7 Teoremi di de l'Hôpital

7.7.1 Caso finito

Teorema 7.7.1. *Siano f, g due funzioni derivabili in un intervallo $]a.b[$ tali che $f, g \to 0$ oppure ∞ per $x \to a^+$, con $g(x), g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a, b[$. Se esiste, finito o infinito*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

Allora

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Dimostrazione. (f, g sono infinitesime per $x \to a^+$)

Definisco $f(a) = g(a) = 0$, dunque f, g sono continue in a. Per il teorema 7.6.2, $\forall x \in]a, b[\ \exists x_0 \in]a, x[$ tale che

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Per ipotesi, dato un arbitrario intorno I di λ, $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in [a, a + \delta]$ si abbia

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in I$$

Allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \in I \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in I$$

□

Dimostrazione. (f, g sono infinite per $x \to a^+$)

Siano I e J due intorni del punto λ, con $J \subset I$. Per ipotesi, $\exists x_1 \in]a, b[$ tale che $\forall x \in]a, x_1[$ si abbia

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in J$$

Per il teorema 7.6.2, $\exists x_0 \in]x, x_1[$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \in J$$

Allora

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}$$

Pongo

$$\varphi(x) = \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}$$

e osservo che

$$\lim_{x \to a^+} \varphi(x) = 1$$

Si ha dunque che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ con } \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \in J$$

Prendo $\varphi(x)$ quanto più vicino a 1, allora $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in [a, a + \delta]$ si abbia

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \in I$$

□

7.7.2 Caso infinito

Teorema 7.7.2. *Siano f, g due funzioni derivabili nella semiretta $]a, +\infty[$, tali che $f, g \to 0$ oppure ∞ per $x \to +\infty$, con $g(x), g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a, +\infty[$. Se esiste, finito o infinito,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Dimostrazione. Pongo $x = \frac{1}{t}$. Allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} =$$

Per il teorema 7.7.1, si ottiene

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

7.8 Formula di Taylor

Teorema 7.8.1 (Formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia f una funzione derivabile $n-1$ volte in un intorno destro di un punto x_0 e derivabile n volte in x_0. Allora si ha, per $x \to x_0^+$*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Inoltre, se $P_n(x)$ è un qualsiasi polinomio di grado al più n tale che, per $x \to x_0^+$, si abbia $f(x) = P_n(x) + (o(x - x_0)^n)$, allora $P_n(x)$ è necessariamente il polinomio di Taylor.

Dimostrazione. (Esistenza)

Sia $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. Bisogna dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{7.2}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$, ma non si può applicare il teorema 7.7.1 n volte in quanto la funzione è derivabile solamente $n-1$ volte in un intorno destro di x_0. Allora

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - T_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0$$

Quindi, dimostrare la relazione (7.2) è equivalente a dimostrare:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - T_{n-1}(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Il limite si presenta nuovamente nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Applicando il teorema 7.7.1 $n-1$ volte si ottiene

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} =$$

Si tratta dunque del limite del rapporto incrementale della funzione $f^{(n-1)}(x)$ nel punto x_0, che per ipotesi esiste finito in quanto f è derivabile n volte in x_0. Si avrà pertanto

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

□

Dimostrazione. (Unicità)

Sia $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$. Per ipotesi, si ha

- $f(x) = T_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$

- $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$

da cui $Q_n(x) = P_n(x) - T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k = o\left((x-x_0)^n\right)$. Bisogna dimostrare che

$$b_k = 0 \quad \forall k$$

Suppongo per assurdo che esista un $b_k \neq 0$ e chiamo h il minimo indice per cui $b_h \neq 0$. Allora:

$$\frac{Q_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{b_h(x-x_0)^h + \cdots + b_n(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = \frac{b_h + \cdots + b_n(x-x_0)^{n-h}}{(x-x_0)^{n-h}}$$

Se $h = n$, allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{Q_n(x)}{(x-x_0)^n} = b_n \neq 0$$

Assurdo in quanto $Q_n(x)$ deve essere infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$. Se $h < n$, allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{Q_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{b_h}{(x-x_0)^{n-h}} = +\infty$$

Assurdo come sopra. Dunque sarà $b_k = 0\ \forall k$, cioè $b_k = a_k - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = 0$ e dunque $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ \forall k$. Da cui segue che

$$P_n(x) = T_n(x)$$

□

Teorema 7.8.2 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Sia f una funzione derivabile n volte in $[x_0, x]$ e $n+1$ volte in $]x_0, x[$. Allora $\exists \xi \in\ ]x_0, x[$ tale che*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione. Sia $t \in [x_0, x]$. Definisco $F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$. F è ovviamente continua in $[x_0, x]$ e derivabile in $]x_0, x[$. Si osserva che

- $F(x) = f(x) \qquad (*)$
- $F(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n \qquad (**)$

Calcoliamo adesso la derivata prima di $F(t)$:

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) =$$

$$= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} =$$

Nella seconda somma, pongo $k-1 = h$, e successivamente ripongo $h = k$, ottenendo:

$$= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k =$$

Porto fuori dalla prima somma il termine per $k = n$ e dalla seconda il termine per $k = 0$:

$$= f'(t) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-x_0)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - f'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = F'(t) \qquad (***)$$

Detta $G(t)$ una qualunque funzione continua in $[x_0, x]$ e derivabile in $]x_0, x[$, con $G'(t) \neq 0 \ \forall t \in]x_0, x[$, applicando il teorema 7.6.2 a $F(t)$ e $G(t)$, $\exists \xi \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} \Longleftrightarrow F(x) = F(x_0) + F'(\xi)\frac{G(x) - G(x_0)}{G'(\xi)}$$

Sostituendo $(*), (**), (***)$ nella relazione precedente, si ottiene:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n \frac{G(x) - G(x_0)}{G'(\xi)} \qquad (1)$$

Scelta infine $G(t) = (x - t)^{n+1}$, soddisfacente le ipotesi del teorema 7.6.2, si ha

- $G(x) = 0$
- $G(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$
- $G'(t) = -(n + 1)(x - t)^n$

Sostituendo in (1), si avrà:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n \frac{-(x - x_0)^{n+1}}{-(n + 1)(x - \xi)^n} =$$

Da cui

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

□

Teorema 7.8.3 (Sviluppabilità in serie di Taylor)**.** *Sia f una funzione derivabile infinite volte per $|x - x_0| \leq \rho$. Se $\exists A, B > 0$ costanti tali che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall t \in]x_0, x[$ si abbia $|f^{(n)}(t)| \leq A \cdot B^{n+1}$, allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right]}_{\text{resto di Lagrange}} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$$

Si ha dunque

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)||x - x_0|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Per ipotesi abbiamo $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq A \cdot B^{n+1}$ e $|x - x_0|^{n+1} \leq \rho^{n+1}$. Dunque:

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)||x - x_0|^{n+1}}{(n + 1)!} \leq A\frac{(B\rho)^{n+1}}{(n + 1)!} \longrightarrow 0 \text{ (per } n \to +\infty)$$

□

Capitolo 8

Integrali definiti

8.1 Definizione di Riemann

Sia f una funzione limitata in un intervallo $[a, b]$ compatto, cioè tale che esistano finiti

$$\inf_{a \leq x \leq b} f(x) = m \qquad \sup_{a \leq x \leq b} f(x) = M$$

Siano $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ un numero finito di suddivisioni di $[a, b]$. $\forall h = 1, \ldots, n$ siano

$$m_h = \inf_{x_{h-1} \leq x \leq x_h} f(x) \qquad M_h = \sup_{x_{h-1} \leq x \leq x_h} f(x)$$

e sia $\Delta_h x = x_h - x_{h-1}$.

Definizione 8.1.1. Si definisce *somma inferiore* la quantità

$$s = \sum_{h=1}^{n} m_h \Delta_h x$$

Definizione 8.1.2. Si definisce *somma superiore* la quantità

$$S = \sum_{h=1}^{n} M_h \Delta_h x$$

Evidentemente, l'area sottesa dal grafico di $f(x)$ e l'asse x sarà compresa tra s e S.

Osservazione 8.1.1. Si ha $m \leq m_h \leq M_h \leq M$ ed anche, moltiplicando per $\Delta_h x > 0$ e sommando su h:

$$m(b - a) \leq s \leq S \leq M(b - a)$$

Con lo stesso ragionamento, per ogni singolo intervallo $[x_{h-1}, x_h]$ si ha, dette σ_h e Σ_h rispettivamente la somma inferiore e superiore relativa all'h-simo intervallo:

$$m_h \Delta_h x \leq \sigma_h \leq \Sigma_h \leq M_h \Delta_h x$$

Sommando su h:

$$s \leq s' \leq S' \leq S$$

Iterando il processo di suddivisione all'infinito, si nota che l'insieme delle somme inferiori sarà superiormente limitato da $M(b - a)$, quindi $\exists \sup s$ finito. Specularmente, l'insieme delle somme superiori sarà inferiormente limitato da $m(b - a)$, quindi $\exists \inf S$ finito.

Definizione 8.1.3. Si definisce *integrale inferiore*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup s$$

Definizione 8.1.4. Si definisce *integrale superiore*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf S$$

Osservazione 8.1.2.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Definizione 8.1.5 (Integrabilità secondo Riemann)**.** Sia f una funzione limitata in un intervallo $[a, b]$. Si dice che f è *integrabile* in $[a, b]$ quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

e si pone

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Proposizione 8.1.1. *Sia f una funzione limitata in un intervallo $[a, b]$. Allora f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se $\forall \epsilon > 0\ \exists$ una suddivisione di $[a, b]$ tale che*

$$S - s < \epsilon$$

Dimostrazione.
($\Longrightarrow$)

Se f è integrabile, dato $\epsilon > 0$ si possono trovare due suddivisioni di $[a, b]$ tali che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2} < s \leq S' < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Con s proveniente da una suddivisione e S' proveniente dall'altra. Considerando una terza suddivisione, più fitta delle due precedenti, che produce s'', S''. Risulta allora che $s \leq s'' \leq S'' \leq S'$ e quindi

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2} < s \leq s'' \leq S'' \leq S' < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Da ciò si evince che $S'' - s'' < \epsilon$.

($\Longleftarrow$)

Per assurdo, se fosse $\sup s < \inf S$, posto

$$\epsilon = \frac{\inf S - \sup s}{2} > 0$$

per ogni suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ si avrebbe che $S - s > \epsilon$, il che contraddice l'ipotesi, e dunque costituisce un assurdo. Pertanto la tesi risulterà essere vera. □

Teorema 8.1.1 (Integrabilità delle funzioni continue)**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ compatto. Allora f è integrabile in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Per il teorema 6.3.1, f è uniformemente continua in $[a, b]$. Allora $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, con $|x_1 - x_2| < \delta$ si abbia

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

Sia $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ una partizione di $[a, b]$ tale che $\Delta_h x = x_h - x_{h-1} < \delta \quad h = 1, \ldots, n$. Per il teorema 6.2.1, l'estremo inferiore e superiore della funzione nell'h-simo intervallo saranno rispettivamente il minimo e il massimo della funzione nell'intervallo. Siano allora

$$m_h = \min_{x_{h-1} \leq x \leq x_h} f(x) = f(\xi_1), \qquad \xi_1 \in [x_{h-1}, x_h]$$

$$M_h = \max_{x_{h-1} \leq x \leq x_h} f(x) = f(\xi_2), \qquad \xi_2 \in [x_{h-1}, x_h]$$

Poiché $\xi_1, \xi_2 \in [x_{h-1}, x_h]$, si ha $|\xi_1 - \xi_2| < \Delta_h x < \delta$ e dunque, per l'uniforme continuità:

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \frac{\epsilon}{b-a} \iff M_h - m_h < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Moltiplicando per $\Delta_h x > 0$ e sommando su h, si ottiene

$$\sum_{h=1}^{n} M_h \Delta_h x - \sum_{h=1}^{n} m_h \Delta_h x < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{h=1}^{n} \Delta_h x$$

Da cui, ricordando che la somma su h di $\Delta_h x$ è l'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ e le definizioni di somma inferiore e superiore, si ha:

$$S - s < \epsilon$$

che è la condizione necessaria e sufficiente di integrabilità. □

Teorema 8.1.2 (Valor medio per funzioni continue)**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Allora $\exists \xi \in [a, b]$ tale che*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Dimostrazione. Sappiamo, dalla definizione, che

$$\inf_{a \leq x \leq b} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Poiché f è continua in $[a, b]$, possiamo integrare tra a e b:

$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx$$

cioè

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

Per il teorema 6.2.1, m e M sono rispettivamente il minimo e il massimo della funzione in $[a, b]$. Allora, per il teorema 6.2.4, sicuramente $\exists \xi \in [a, b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

□

Proposizione 8.1.2. *Sia f una funzione limitata in un intervallo $[a, b]$ e sia $c \in [a, b]$. f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se è integrabile sia in $[a, c]$ che in $[c, b]$. Si ha inoltre*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Dimostrazione. Dato $\epsilon > 0$, siano $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = c$ e $X_0 = c < X_1 < \ldots < X_n = b$ due suddivisioni rispettivamente di $[a, c]$ e $[c, b]$ tali che $S_a^c - s_a^c < \epsilon/2$ e $S_c^b - s_c^b < \epsilon/2$. Posto $S_a^b = S_a^c + S_c^b$ e $s_a^b = s_a^c + s_c^b$ si ha $S_a^b - s_a^b < \epsilon$, dunque f è integrabile in $[a, b]$. Viceversa, se $S_a^b - s_a^b < \epsilon$, allora si avrà necessariamente $S_a^c - s_a^c < \epsilon$ e $S_c^b - s_c^b < \epsilon$, trattandosi di quantità positive, dunque f è integrabile sia in $[a, c]$ che in $[c, b]$. Si può dunque scrivere:

$$s_a^c \leq \int_a^c f(x)\, dx \leq S_a^c \qquad s_c^b \leq \int_c^b f(x)\, dx \leq S_c^b$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$s_a^c + s_c^b = s_a^b \leq \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \leq S_a^b = S_a^c + S_c^b$$

Ricordando che per definizione

$$s_a^b \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S_a^b$$

sottraendo membro a membro si trova

$$0 \leq \int_a^b f(x)\, dx - \left[\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\right] \leq 0$$

da cui si evince

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

□

8.2 Somme di Riemann

Definizione 8.2.1. Sia f una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$. Si definisce *somma di Riemann* una somma compresa tra la somma inferiore e quella superiore, costruita scegliendo punti diversi dall'inf e il sup di ogni intervallo.

$$\sigma = \sum_{h=1}^{n} f(\xi_h)\Delta_h x$$

Proposizione 8.2.1. *Sia f integrabile in $[a, b]$. Allora, $\forall \epsilon > 0\ \exists x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ tale che, per ogni scelta di $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ si abbia*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \epsilon$$

Dimostrazione. Poiché f è integrabile, dato $\epsilon > 0$ esiste una suddivisione di $[a, b]$ tale che $S - s < \epsilon$. Inoltre, $\forall i$ si ha $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$. Moltiplicando per $\Delta_i x$ e sommando su i si ottiene

$$s \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \leq S$$

Ma poiché si ha anche

$$s \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S$$

segue allora che

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - \int_a^b f(x)\, dx\right| \leq S - s < \epsilon$$

□

Definizione 8.2.2. Sia f una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$ con $a < b$. Si definisce allora

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

In particolare

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

8.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 8.3.1 (Fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ compatto e sia $x_0 \in [a, b]$. $\forall X \in [a, b]$ sia*

$$F(X) = \int_{x_0}^X f(x)\, dx$$

Allora F è derivabile in $[a, b]$ e si ha $F'(X) = f(X), \quad \forall X \in [a, b]$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale di F è

$$\frac{\Delta F}{\Delta X} = \frac{F(X+h) - F(X)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{X+h} f(x)\, dx - \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx}{h} =$$

Per la proposizione **??**, diventa:

$$= \frac{1}{h} \int_X^{X+h} f(x)\, dx.$$

Per il teorema 8.1.2, $\exists \xi \in [X, X+h]$ tale che

$$\frac{1}{h} \int_X^{X+h} f(x)\, dx = f(\xi)$$

Evidentemente, se $h \to 0$, allora $\xi \to X$. Quindi risulta che

$$F'(X) = \lim_{\xi \to X} f(\xi) =$$

Per la continuità di f, si avrà pertanto

$$= f(X)$$

□

Corollario 8.3.1.1. *Ogni funzione continua ammette almeno una (e di conseguenza infinite) primitiva.*

Corollario 8.3.1.2 (Formula fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia f continua in $[a, b]$ e φ una qualunque primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a) = [\varphi(x)]_a^b$$

Dimostrazione. Poiché φ, F sono due primitive di f, per il corollario 7.6.3.3 si ha $\varphi(X) = F(X) + C$, $\forall X \in [a, b]$ con C costante. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^b f(x)\, dx + \int_a^{x_0} f(x)\, dx = \int_{x_0}^b f(x)\, dx - \int_{x_0}^a f(x)\, dx =$$

$$= F(b) - F(a) = \varphi(b) - C - \varphi(a) + C = \varphi(b) - \varphi(a)$$

□

Teorema 8.3.2 (Linearità dell'integrale definito)**.** *Siano f, g integrabili in un intervallo $[a, b]$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ costanti. Allora $\lambda f(x) + \mu g(x)$ è integrabile in $[a, b]$ e si ha*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx\ + \mu \int_a^b g(x)\ dx$$

Dimostrazione. Suppongo f, g continue in $[a, b]$. Siano φ una primitiva di f e ψ una primitiva di g in $[a, b]$. Dunque:

$$D(\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)) = \lambda\varphi'(x) + \mu\psi'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

da cui segue che:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = [\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]_a^b = \lambda[\varphi(x)]_a^b + \mu[\psi(x)]_a^b =$$

$$= \lambda \int_a^b f(x)\ dx\ + \mu \int_a^b g(x)\ dx$$

□

Teorema 8.3.3 (Monotonia dell'integrale indefinito)**.** *Siano f, g due funzioni continue in un intervallo $[a, b]$ compatto tali che $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$. Allora*

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

Dimostrazione. Poiché $f(x) \leq g(x)$ nel compatto $[a, b]$, effettuando una suddivisione dell'intervallo la diseguaglianza permane. Sia allora $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ una suddivisione e $\Delta_h x = x_h - x_{h-1}$. Dunque risulta

$$f(\xi_h) \leq g(\xi_h) \qquad \forall \xi_h \in [x_{h-1}, x_h]$$

Moltiplicando ambo i membri per $\Delta_h x > 0$ e sommando su h si ottengono le somme di Riemann

$$\sum_{h=1}^{n} f(\xi_h)\Delta_h x \leq \sum_{h=1}^{n} g(\xi_h)\Delta_h x$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, la diseguaglianza permane:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=1}^{n} f(\xi_h)\Delta_h x \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=1}^{n} g(\xi_h)\Delta_h x$$

Cioè, per definizione,

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

□

Teorema 8.3.4. *Sia f una funzione integrabile in $[a, b]$, con $a < b$. Allora*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Dimostrazione.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Integrando da a a b:

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

da cui segue:

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

8.4 Regola di integrazione per parti

8.4.1 Per integrali indefiniti

Proposizione 8.4.1. *Siano f, g due funzioni di classe $C^1(I)$, con I insieme. Allora:*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Dimostrazione. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Dunque:

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(x)g(x) + C$$

Per la linearità dell'integrale, segue che:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

□

8.4.2 Per integrali definiti

Proposizione 8.4.2. *Siano f, g due funzioni di classe $C^1([a, b])$. Allora*

$$\int_a^b (f(x)g'(x))\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Dimostrazione. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Per il teorema 8.3.1 si ha

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

Per linearità dell'integrale definito:

$$\int_a^b (f(x)g'(x))\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

□

8.5 Regola di integrazione per sostituzione

8.5.1 Per integrali indefiniti

Proposizione 8.5.1. *Sia $f(x)$ una funzione integrabile. Posto $x = \varphi(t)$, si ha*

$$\int f(x)\,dx = \int (f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Con $F(t)$ primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Dimostrazione.

$$D(F(\varphi^{-1}(x))) = F'(\varphi^{-1}(x))D(\varphi^{-1}(x)) = F'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{F'(t)}{\varphi'(t)} =$$

$$= \frac{f(\varphi(t))\varphi'(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$$

□

8.5.2 Per integrali definiti

Proposizione 8.5.2. *Sia $\varphi(t)$ di classe $C^1([\alpha, \beta])$, siano*

$$m = \min_{\alpha \leq t \leq \beta} \varphi(t) \qquad M = \max_{\alpha \leq t \leq \beta} \varphi(t)$$

Pongo $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Sia f una funzione continua in $[m, M]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

Dimostrazione. $\forall T \in [\alpha, \beta]$ siano

$$F(T) = \int_\alpha^T f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \qquad G(T) = \int_a^{\varphi(T)} f(x)\, dx$$

Per il teorema 8.3.1:

$$F'(T) = f(\varphi(T))\varphi'(T) \qquad G'(T) = f(\varphi(T))\varphi'(T)$$

Dunque, per il corollario 7.6.3.3, $F(T) = G(T) + C$ $\forall T \in [\alpha, \beta]$ In particolare, per $T = \alpha$, $F(\alpha) = G(\alpha) + C$, cioè

$$\int_\alpha^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_a^{\varphi(\alpha)=a} f(x)\, dx \ + C$$

Quindi, per definizione, segue che $C = 0$. Allora $F(T) \equiv G(T)$ $\forall T$, in particolare, per $T = \beta$ si ha

$$\int_a^{\varphi(\beta)=b} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

□

8.6 Criterio di convergenza di Cauchy per funzioni

Teorema 8.6.1 (Criterio di convergenza di Cauchy per funzioni)**.** *Sia f una funzione definita in un intorno di un punto x_0 (finito o infinito). Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

esiste finito se e solo se $\forall \epsilon > 0$ $\exists \sigma$ intorno di x_0 tale che $\forall x_1, x_2 \in \sigma \setminus \{x_0\}$ si ha:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$)

Per definizione di limite, $\forall \epsilon > 0$ $\exists \sigma$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in \sigma \setminus \{x_0\}$ si abbia $|f(x) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2}$. Allora, presi $x_1, x_2 \in \sigma \setminus \{x_0\}$ si ha

- $|f(x_1) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2}$
- $|f(x_2) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2}$

Pertanto

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - \lambda - f(x_2) + \lambda| \leq |f(x_1) - \lambda| + |f(x_2) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$)

$\forall \xi_1, \xi_2, \ldots \to x_0$, la successione $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots$ è di Cauchy. Infatti $\forall \epsilon > 0$ determino l'intorno σ di x_0 nel quale valga la condizione di Cauchy. Poiché $\xi_n \to x_0$, $\exists n_0$ tale che $\forall n > n_0, \quad \xi_n \in \sigma$. Per il criterio 5.4.1

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots \to \lambda \text{ finito}$$

Dimostriamo che λ è indipendente dalla scelta della successione ξ_n. Sia

$$\xi_1', \xi_2', \ldots \to x_0$$

e per assurdo suppongo che $f(\xi_1'), f(\xi_2'), \ldots \to \lambda'$. Allora la successione

$$\xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \ldots$$

tende a x_0 e dunque la successione

$$f(\xi_1), f(\xi_1'), f(\xi_2), f(\xi_2'), \ldots \to \lambda''$$

Ma se una successione tende a limite finito, allora ogni sua estratta deve necessariamente ammettere lo stesso limite, per cui, per l'unicità del limite, segue che $\lambda = \lambda' = \lambda''$. □

Corollario 8.6.1.1. *Siano f, g definite in $[a, b[$ tali che $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b[$. Se*

$$\int_a^b g(x)\, dx$$

converge allora

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

converge.

Dimostrazione. $\forall X \in [a, b]$ siano

$$G(X) = \int_a^X g(x)\, dx \qquad F(X) = \int_a^X f(x)\, dx$$

Per ipotesi,

$$\lim_{X \to b^-} G(X)$$

esiste finito. Dunque per il criterio 8.6.1, $\forall \epsilon > 0$ $\exists \sigma$ intorno di b tale che $\forall X_1, X_2 \in \sigma \setminus \{b\}, X_1 < X_2$ si abbia

$$|G(X_2) - G(X_1)| < \epsilon$$

cioè, per la definizione di G e per l'additività dell'integrale,

$$\left| \int_{X_1}^{X_2} g(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Essendo $X_1 < X_2$ e $g(x) \geq |f(x)| \geq 0$, per le proprietà dell'integrale indefinito, possiamo rimuovere il modulo dalla relazione precedente. Poiché

$$\left| \int_{X_1}^{X_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{X_1}^{X_2} |f(x)|\, dx \leq \int_{X_1}^{X_2} g(x)\, dx < \epsilon$$

Segue che $|F(X_2) - F(X_1)| < \epsilon$ e dunque, per il criterio 8.6.1,

$$\lim_{X \to b^-} F(X)$$

esiste finito. Pertanto

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

converge. □

8.7 Successioni di funzioni

Definizione 8.7.1. Siano $f_1(x), f_2(x), \ldots$ funzioni definite in un insieme $I \in \mathbb{C}$. Si dice che la successione $f_n(x)$ converge *puntualmente* a una funzione $f(x)$ se

$$\forall \epsilon > 0 \text{ e } \forall x \in I \; \exists n_0 \mid \forall n > n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Definizione 8.7.2. Sotto le medesime ipotesi, si dice che la successione $f_n(x)$ converge *uniformemente* a una funzione $f(x)$ se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \forall n > n_0 \text{ e } \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Cioè, l'indice n_0 dipende solo da ϵ.

Teorema 8.7.1. *Siano $f_1(x), f_2(x), \ldots$ funzioni continue in un insieme $I \in \mathbb{C}$ tali che la successione $f_n(x)$ converga uniformemente a $f(x)$ in I. Allora $f(x)$ è continua in I.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I$. Bisogna dimostrare che $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ si abbia

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Sia n_0 tale che $\forall n > n_0$ e $\forall x \in I \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ per la convergenza uniforme. Inoltre, $\forall n > n_0$, per la continuità di $f_n(x)$, si ha che $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ si abbia $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Allora:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

□

Proposizione 8.7.1. *Siano $f_1(x), f_2(x), \ldots$ funzioni continue in un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tali che la successione $f_n(x)$ converga uniformemente a $f(x)$ in $[a, b]$. Allora si ha*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx \int_a^b f(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx$$

Per la convergenza uniforme della successione $f_n(x)$, $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ e $\forall x \in [a, b]$ si abbia

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

Dunque

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \frac{\epsilon}{b - a} \int_a^b dx = \epsilon$$

□

Proposizione 8.7.2. *Siano $f_1(x), f_2(x), \ldots$ funzioni derivabili e con derivata prima continua in un intervallo $[a, b]$ tali che la successione $f_n(x)$ converga puntualmente a $f(x)$ in $[a, b]$ e la successione $f_n'(x)$ converga uniformemente a $g(x)$ in $[a, b]$. Allora $f(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e si ha*

$$f'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione. $\forall x_0, X \in [a, b]$ si ha, per la proposizione precedente,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{X} f_n(x)\, dx = \int_{x_0}^{X} g(x)\, dx$$

Poiché f_n' è continua per ogni n e anche g è continua, per il teorema 8.3.1 segue

$$\int_{x_0}^{X} f_n'(x)\, dx = f_n(X) - f_n(x_0) \qquad \int_{x_0}^{X} g(x)\, dx = G(X) - G(x_0)$$

Abbiamo dunque

$$\lim_{n \to +\infty} (f_n(X) - f_n(x_0)) = G(X) - G(x_0)$$

Per la convergenza puntuale della successione f_n:

$$f(X) - f(x_0) = G(X) - G(x_0)$$

Divido ambo i membri per $X - x_0$ ed eseguo il limite per $X \to x_0$:

$$\lim_{X \to x_0} \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = \lim_{X \to x_0} \frac{G(X) - G(x_0)}{X - x_0} = G'(x_0) = g(x_0)$$

Allora il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x)$ nel punto x_0 esiste finito, per cui si conclude che

$$f'(x_0) = g(x_0)$$

$\square$

Capitolo 9

Serie

9.1 Serie numeriche

Sia $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione numerica ed associamo ad ogni a_n la quantità S_n detta *somma parziale n-sima* definita da:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Definizione 9.1.1. Si definisce *serie* la successione delle somme parziali e si indica con

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Con questa scrittura si intende formalmente il limite della successione delle somme parziali.

9.2 Carattere delle serie

Il carattere di una serie rappresenta il valore della somma dei suoi infiniti termini. Per studiare il carattere di una serie, si può calcolare il limite per n che tende ad infinito della successione delle somme parziali. Si distinguono dunque tre casi:

- Se il limite esiste finito la serie si dice *convergente*;
- Se il limite è infinito la serie si dice *divergente*;
- Se il limite non esiste la serie si dice *indeterminata* o *oscillante*.

9.3 Serie geometrica

Definizione 9.3.1. Si definisce *serie geometrica di ragione k* una serie nella forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n$$

Osservazione 9.3.1.
L'n-esima somma parziale di una serie geometrica di ragione k è $S_n = 1 + x + \cdots + x^n$. Allora si ha

$$\frac{1-k^{n+1}}{1-k} = 1 + k + \cdots + k^n = S_n$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$$

Da quest'ultima relazione si può facilmente dedurre il carattere della serie al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- $k = 1$: la serie è divergente perché si ha $1 + k + \cdots + k^n \geq 1 + nk \to +\infty$;
- $k > 1$: la serie è divergente perché si ha $k^{n+1} \to +\infty$ e quindi il limite delle somme parziali è infinito;
- $k = -1$: la serie è indeterminata perché la somma oscilla tra 1 e 0;
- $k < -1$: la serie è indeterminata perché non esiste il limite delle somme parziali;
- $|k| < 1$: la serie è convergente a $\frac{1}{1-k}$ in quanto $k^{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$.

9.4 Criterio di convergenza di Cauchy per le serie

Teorema 9.4.1 (Criterio di convergenza di Cauchy per le serie)**.** *Una serie $a_1 + a_2 + \cdots$ a termini reali o complessi converge se e solo se $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ e $\forall p \geq 1$ si abbia*

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

Dimostrazione. Una serie converge se e solo se converge la successione S_n delle somme parziali, cioè se e solo se la successione S_n è di Cauchy, ovvero $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall m, n > n_0 (m > n)$ si abbia

$$|S_m - S_n| < \epsilon$$

Per la definizione di somma parziale, $S_m = a_1 + \cdots + a_m$ e $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Allora:

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m| < \epsilon$$

Posto $m = n + p$, otteniamo la tesi. □

Osservazione 9.4.1 (Condizione necessaria per la convergenza). Se una serie converge a λ finito, cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lambda < \infty$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Poiché $a_n = S_n - S_{n-1}$, segue che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lambda - \lambda = 0$$

O alternativamente, usando il criterio 9.4.1 con $p = 1$, si ha che $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ si abbia $|a_{n+1}| < \epsilon$, che è esattamente la definizione del limite interessato. □

9.5 Criteri di convergenza per serie a termini positivi

9.5.1 Criterio del confronto

Teorema 9.5.1. *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

due serie a termini positivi, tali che $\forall n\ a_n \leq b_n$. *Se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \leq B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Dimostrazione. Posti $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, si ha che A_n e B_n sono due successioni monotone generalmente crescenti. Dunque per il teorema 5.1.1 ammettono limite. Per ipotesi, B_n ammette limite finito B. Avremo quindi:

$$A_n \leq B_n \leq B$$

Da cui si evince che il limite di A_n è finito, ed è minore o uguale a B. □

9.5.2 Criterio del rapporto

Teorema 9.5.2. *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini positivi. Se esiste una costante k, *con* $|k| < 1$, *tale che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k \quad \forall n$$

allora la serie converge.

Dimostrazione. Si dimostra per induzione che $\forall n$ si ha

$$a_{n+1} \leq k^n a_1$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 \sum_{n=0}^{\infty} k^n$$

Quindi la serie è maggiorata da una serie geometrica di ragione k tale che $|k| < 1$, dunque convergente. Allora, per il criterio 9.5.1, la serie converge. □

9.5.3 Criterio della radice

Teorema 9.5.3. *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie a termini positivi. Se esiste una costante k, *con* $|k| < 1$, *tale che*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k \quad \forall n$$

Allora la serie converge.

Dimostrazione. Si ha evidentemente che

$$a_n \leq k^n \quad \forall n$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq k \sum_{n=0}^{\infty} k^n$$

Quindi la serie è maggiorata da una serie geometrica di ragione k tale che $|k| < 1$, dunque convergente. Allora, per il criterio 9.5.1, la serie converge. □

9.5.4 Criterio dell'integrale

Teorema 9.5.4. *Sia f una funzione a valori positivi monotona generalmente decrescente definita in $[1, +\infty[$ tale che sia integrabile in $[1, X]$ $\forall X \in [1, +\infty[$. Allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

se e solo se

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$)

Per il teorema 8.1.2, in un generico intervallo $[a, b]$ si avrà

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

Per ogni intervallo $[N-1, N]$, si avrà $f(N) = m$ poiché f è monotona decrescente. Allora $\forall n \geq 2$

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$$

Sommando le diseguaglianze per $n = 2, \ldots, N$ si ottiene

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(N) \leq \int_1^2 f(x)\, dx \; + \int_2^3 f(x)\, dx \; + \ldots + \int_{N-1}^{N} f(x)\, dx =$$

$$= \int_{N-1}^{N} f(x)\, dx$$

Poiché la successione $f(n)$ è monotona crescente, l'N-esima somma parziale per $N \to +\infty$ non supera il limite dell'integrale, che per ipotesi converge. Dunque

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq f(1) + \lim_{N \to +\infty} \int_1^N f(x)\, dx$$

Ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx < \infty$$

□

Dimostrazione. ($\Rightarrow$)

Scelgo un qualunque numero reale $X > 1$ e sia $N = [X]$ (parte intera). Allora

$$\int_1^X f(x)\, dx \leq \int_1^{N+1} f(x)\, dx$$

L'integrale rappresenta l'area sottesa dal grafico della curva e, per costruzione, sarà minore di $f(1) + f(2) + \cdots + f(N)$, cioè l'N-esima somma parziale della serie. Dunque

$$\int_1^X f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

Pertanto, per $N, X \to +\infty$ si ottiene

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

□

9.6 Criterio di convergenza di Leibniz

Teorema 9.6.1. *Sia a_n una successione a termini positivi. Allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

converge se e solo se la successione a_n è monotona decrescente e $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

Dimostrazione. La successione S_{2n} delle somme parziali di indice pari è monotona generalmente crescente, infatti

$$S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \geq S_{2n}$$

Mentre la successione S_{2n-1} delle somme parziali di indice dispari è monotona generalmente decrescente, infatti

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0} \leq S_{2n-1}$$

Inoltre, $\forall n, \quad S_{2n} \leq S_{2n-1}$ e $S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \to 0$ per $n \to +\infty$. Allora gli intervalli incapsulati $[S_2 - S_1] \supset [S_4, S_3] \supset \ldots$ per il teorema 5.3.1 hanno come intersezione un punto S, unico in quanto l'ampiezza degli intervalli tende a zero, tale che

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim_{n \to +\infty} S_{2n-1}$$

da cui segue che la serie converge. □

9.7 Riordinamento di una serie

Definizione 9.7.1. Si dice che una serie $a_1 + a_2 + \cdots$ converge *assolutamente* se converge la serie $|a_1| + |a_2| + \cdots$.

Osservazione 9.7.1. Se una serie $a_1 + a_2 + \cdots$ converge assolutamente, allora converge normalmente.

Dimostrazione. Per il criterio 9.4.1, $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ e $\forall p \geq 1$ si abbia

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$$

Dunque:

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$$

Pertanto la serie converge per il criterio 9.4.1. □

Teorema 9.7.1. *Sia* $a_1 + a_2 + \cdots$ (1) *una serie a termini positivi e sia* $a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots$ (2) *la serie ottenuta riordinando in un modo qualsiasi i termini della* (1)*. Allora la somma della serie* (2) *è uguale a quella della serie* (1)*.*

Dimostrazione. Supponiamo che $a_1+a_2+\cdots = \lambda$ (finito). Per ogni intero positivo k, sia $k = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Allora

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq \lambda$$

Allora le somme parziali della (2) si mantengono minori o uguali a λ e, poiché sono monotone crescenti, ammettono limite finito $\lambda' \leq \lambda$. Dato che la serie (1) si può ottenere come riordinamento della serie (2), invertendo il ragionamento si ottiene che $\lambda \leq \lambda'$ e dunque $\lambda = \lambda'$. □

Teorema 9.7.2. *Sia* $a_1 + a_2 + \cdots = \lambda$ (1) *una serie a termini reali (non necessariamente positivi) assolutamente convergente. Allora la serie* $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots$ (2) *ottenuta riordinando in un modo qualsiasi i termini della* (1) *converge a* λ*.*

Dimostrazione. Siano $b_1, b_2, \ldots$ i termini positivi della serie (1) e $c_1, c_2, \ldots$ i valori assoluti di quelli negativi. Allora le due serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

sono entrambe convergenti in quanto estratte da (2). Si avrà dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \quad (*)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C \quad (**)$$

Riordinando la serie (2), otteniamo un riordinamento anche delle serie $(*)$ e $(**)$. Pertanto:

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} = (b_{m_1} + \cdots + b_{m_r}) - (c_{p_1} + \cdots + c_{p_s})$$

Mandando k, r, s all'infinito:

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots = B - C$$

e, per l'unicità del limite, segue $B - C = \lambda$ □

Teorema 9.7.3. *Sia* $a_1 + a_2 + \cdots = \lambda$ (1) *una serie a termini complessi assolutamente convergente. Allora la serie* $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots$ (2) *ottenuta riordinando in un modo qualsiasi i termini della* (1) *converge a* λ*.*

Dimostrazione. $\forall n$ poniamo $a_n = b_n + ic_n$, con $b_n, c_n \in \mathbb{R}$. La serie (2) diventa pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + ic_n)$$

Dunque

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} = (b_{n_1} + \cdots + b_{n_k}) + i(c_{n_1} + \cdots + c_{n_k})$$

Poiché $|b_n| \leq |a_n|$ e $|c_n| \leq |a_n|$ $\forall n$ e $|a_1| + |a_2| + \cdots < \infty$, per il criterio 9.5.1 segue che le serie $|b_1| + |b_2| + \cdots$ e $|c_1| + |c_2| + \cdots$ convergono. Allora le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$$

convergono assolutamente, e quindi indipendentemente dall'ordine dei termini. Si conclude che

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} = (b_{n_1} + \cdots + b_{n_k}) + i(c_{n_1} + \cdots + c_{n_k}) \to B + iC$$

e poiché $a_1 + a_2 + \cdots = \lambda$, per l'unicità del limite, segue che $\lambda = B + iC$. □

9.8 Serie somma

Proposizione 9.8.1. *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \qquad \sum_{n=1}^{\infty} = \mu$$

due serie a termini qualunque convergenti. Allora si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lambda + \mu$$

Dimostrazione. L'n-esima somma parziale S_n della serie somma sarà

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_1 + \cdots + b_n) = \lambda + \mu$$

□

9.9 Serie prodotto

Teorema 9.9.1. *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n = B$$

due serie a termini reali o complessi assolutamente convergenti. Siano $p_1, p_2, \ldots$ tutti i possibili prodotti $a_h b_k$ in ordine qualsiasi. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

è assolutamente convergente, ed ha per somma AB.

Dimostrazione. Fissato $n \geq 1$, sia m il massimo degli indici h e k che figurano nei prodotti $a_h b_k$. Allora

$$|p_1| + |p_2| + \cdots + |p_n| \leq (|a_1| + \cdots + |a_m|)(|b_1| + \cdots + |b_m|) \leq A^* B^* < \infty$$

Da ciò segue che $p_1 + p_2 + \cdots$ converge assolutamente. Inoltre si ha $\forall n$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n^2} = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$$

e, per $n \to \infty$,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n^2} \to AB$$

Poiché $p_1 + p_2 + \cdots$ è assolutamente convergente, allora la convergenza prescinde dall'ordine degli addendi. Poiché p_{n^2} è una sottosuccessione di p_n, se era

$$\lim_{n\to\infty} (p_1 + \cdots + p_n) = P$$

allora, per l'unicità del limite, $P = AB$. □

9.10 Serie di funzioni

Siano $u_1(x), u_2(x), \ldots$ funzioni definite in un insieme $I \subset \mathbb{C}$ e sia

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = f(x)$$

Definizione 9.10.1. Si dice che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

converge uniformemente a una funzione $f(x)$ in I quando la successione della somme parziali $f_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in I, ovvero quando $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ e $\forall x \in I$ si abbia

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < \epsilon$$

Poiché

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

si ha allora

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \epsilon$$

Nota 9.10.1. *La somma*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

si denota con $R_n(x)$. Mentre la scrittura $R_{n,p}(x)$ denota la somma $u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)$.

Proposizione 9.10.1. *Sono fatti equivalenti:*

1. $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ *tale che* $\forall n > n_0$ *e* $\forall x \in I \quad |R_n(x)| < \epsilon$
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ *tale che* $\forall n > n_0$, $\forall x \in I$ *e* $\forall p \geq 1 \quad |R_{n,p}(x)| < \epsilon$

Dimostrazione. (2) $\Rightarrow$ (1)

Fissato $\epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0,\ \forall x \in I,\ \forall p \geq 1 \quad |R_{n,p}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ma, per $p \to +\infty$, $R_{n,p}(x) \to R_n(x)$. Allora $|R_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. □

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2)

Siano

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots \qquad R_{n+p}(x) = u_{n+p+1}(x) + u_{n+p+2}(x) + \cdots$$

Allora, fissato $\epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0,\ \forall x \in I,\ \forall p \geq 1$ si abbia

$$|R_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad |R_{n+p}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si ha inoltre che $R_{n+p}(x) - R_n(x) = u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) = R_{n,p}(x)$. Allora:

$$|R_{n,p}(x)| = |R_{n+p}(x) - R_n(x)| \leq |R_{n+p}(x)| + |R_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Definizione 9.10.2. Siano $u_1(x), u_2(x), \ldots$ funzioni definite in un insieme I. Si dice che la serie $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ converge *totalmente* in I quando esiste una serie convergente di costanti $c_1 + c_2 + \cdots$ tale che $|u_n(x)| \leq c_n\ \forall n$ e $\forall x \in I$.

Proposizione 9.10.2. *Sia*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

una serie di funzioni convergente totalmente in I. Allora la serie converge assolutamente ed uniformemente su $\forall x \in I$.

Dimostrazione. Dalla definizione di convergenza totale:

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots \leq c_1 + c_2 + \cdots < \infty$$

Da cui segue, per il criterio 9.5.1, che la serie converge assolutamente. Inoltre, poiché $c_1 + c_2 + \cdots$ converge, per il criterio 9.4.1, $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ e $\forall p \geq 1$ si abbia

$$c_{n+1} + \cdots + c_{n+p} < \epsilon$$

Dunque, $\forall x \in I$, si avrà

$$|R_{n,p}(x)| = |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| \leq$$

$$\leq c_{n+1} + \cdots + c_{n+p} < \epsilon$$

Quindi segue che la serie converge uniformemente. □

Osservazione 9.10.1. Siano $u_1(x), u_2(x), \ldots$ funzioni continue in un insieme I tali che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

converga uniformemente a $f(x)$ in I. Allora $f(x)$ è continua in I.

Dimostrazione. Posto $f_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$, abbiamo

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

uniformemente in I. Allora, per il teorema 8.7.1, si ha che $f(x)$ è continua in I. □

Osservazione 9.10.2. Sia $I = [a, b]$. Sotto le stesse ipotesi, si ha che $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e inoltre

$$\int_a^b u_1(x)\, dx\ + \int_a^b u_2(x)\, dx\ + \cdots = \int_a^b f(x)\, dx$$

Osservazione 9.10.3. Posto $f_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$ si ha, per $n \to +\infty$, $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente in $[a, b]$. Dunque

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

e anche

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b u_1(x)\, dx\ + \cdots + \int_a^b u_n(x)\, dx \right) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Osservazione 9.10.4. Siano $u_1(x), u_2(x), \ldots$ funzioni di classe $C^1([a, b])$ tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = f(x)$$

puntualmente in $[a, b]$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) = g(x)$$

uniformemente in $[a, b]$. Allora $f(x) \in C^1([a, b])$ e si ha $f'(x) = g(x)\ \forall x \in [a, b]$.

9.11 Serie di potenze

Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con a_n costanti complesse e x è una variabile complessa.

Definizione 9.11.1. Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

una serie di potenze. Si definisce *raggio di convergenza* della serie la quantità

$$\rho = \left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

da cui $0 \leq \rho \leq +\infty$.

Teorema 9.11.1 (Cauchy-Hadamard)**.**
Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

una serie di potenze con raggio di convergenza ρ. Allora la serie converge totalmente $\forall x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| \leq \lambda$, con $\lambda < \rho$, e quindi puntualmente $\forall x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| < \rho$. Inoltre, $\forall x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| > \rho$, la serie diverge.

Dimostrazione. Sia μ tale che $0 < \lambda < \mu < \rho$. Dunque

$$\frac{1}{\mu} > \frac{1}{\rho} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Allora $\exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ si abbia

$$\frac{1}{\mu} > \sqrt[n]{|a_n|}$$

Perciò, $\forall n > n_0$ e $\forall x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| \leq \lambda$ si avrà

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n = \left(\sqrt[n]{|a_n|}|x| \right)^n \leq \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Quindi la serie di potenze è maggiorata da una serie geometrica di ragione $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, dunque convergente. Allora, per il criterio 9.5.1, la serie di potenze converge. Se invece $|x| > \rho$ allora $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{\rho} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Perciò esisteranno infiniti indici $n_1 < n_2 < \ldots$ per cui

$$\frac{1}{|x|} < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

da cui

$$|a_{n_k} x^{n_k}| = \left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}|x| \right)^{n_k} > 1$$

Pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} a_n x^n \neq 0$$

che implica che la serie $a_n x^n$ diverge. □

Corollario 9.11.1.1.
Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

una serie di potenze. Se $a_n \neq 0$ per ogni n abbastanza grande e se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

allora

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare il teorema 9.11.1 con la nuova definizione di ρ. Siano dunque $x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| < \rho$ e λ tale che

$$|x| \leq \lambda < \rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Allora $\exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ si abbia

$$\lambda < \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Dunque si avrà

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| \leq \frac{|x|}{\lambda} < 1$$

Allora per il criterio 9.5.2, la serie di potenze converge. Sia adesso $x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| > \rho$. Allora $\exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ si abbia

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} < |x|$$

da cui segue

$$|a_{n+1}x^{n+1}| = |a_{n+1}||x|^n|x| > |a_{n+1}||x|^n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = |a_n x^n|$$

Dunque la successione $|a_n x^n|$ è monotona crescente per $n > n_0$ e quindi non può tendere a zero. Di conseguenza, la serie di potenze diverge. □

Osservazione 9.11.1. Siano $a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n$ e x una variabile reale. Sia ρ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \lambda < \rho$. Per il teorema 9.11.1, la serie converge totalmente in $[-\lambda, \lambda]$. Dunque, $\forall X$ tale che $|X| \leq \lambda$ si ha

$$\int_0^X f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^X x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$$

Definizione 9.11.2. Due successioni α_n, β_n reali o complesse si dicono *asintotiche* se

$$\alpha_n = 0 \Longleftrightarrow \beta_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$$

Proposizione 9.11.1. *Due successioni asintotiche ammettono gli stessi punti limite.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \neq 0$ un punto limite della successione α_n. Esiste allora un'estratta di α_n tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_{n_k} = \lambda$$

Per ogni $k = 1, 2, 3, \ldots$ si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \beta_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{n_k}} \alpha_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \alpha_{n_k} = \lambda$$

□

Teorema 9.11.2.
Siano

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

una serie di potenze di raggio di convergenza ρ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)$$

la serie delle derivate di raggio di convergenza σ. Allora si ha $\rho = \sigma$.

Dimostrazione. Per il teorema 9.11.1,

$$\rho = \left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \qquad \sigma = \left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \right)^{-1}$$

Bisogna dimostrare che le successioni $\sqrt[n]{|a_n|}$ e $\sqrt[n]{n|a_n|}$ sono asintotiche. Evidentemente si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \iff \sqrt[n]{n|a_n|} = 0$$

Inoltre

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n|a_n|}}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Dunque le due successioni sono asintotiche e in quanto tali ammettono lo stesso lim sup, cioè $\rho = \sigma$. □

9.12 Serie di MacLaurin

Sia f una funzione derivabile n volte in zero. Allora il suo polinomio di MacLaurin di grado n è

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

e la sua serie di MacLaurin, purché f sia derivabile infinite volte in zero, è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Teorema 9.12.1.
Sia $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$. Allora, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Dimostrazione. Derivando termine a termine n volte nell'intervallo $[-\rho, \rho]$ si ha

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{dipendono tutti da } x}$$

$$f^{(n)}(0) = n! a_n \iff a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

□

Definizione 9.12.1. Una funzione f si dice *analitica* in un intorno dell'origine se $f \in C^\infty(]-\rho, \rho[)$, con ρ raggio di convergenza, e $\forall x \in]-\rho, \rho[$ si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Definizione 9.12.2. $\forall z \in \mathbb{C}$ si definisce

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad (\rho = +\infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \qquad (\rho = +\infty)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \qquad (\rho = +\infty)$$

Proposizione 9.12.1 (Formula di Eulero)**.** *$\forall z \in \mathbb{C}$ si ha*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Dimostrazione.

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) = \cos z + i \sin z$$

□

Osservazione 9.12.1. $\forall z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

9.13 Funzioni iperboliche

Definizione 9.13.1. $\forall z \in \mathbb{C}$ si definisce

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

9.13.1 Sviluppi di MacLaurin per seno e coseno iperbolici

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Inoltre si verifica che

$$\cosh z = \cos(iz) \qquad \sinh z = -i \sin(iz)$$

da cui

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

9.14 Teorema di Abel

Teorema 9.14.1 (Abel)**.**
Siano $a_n \in \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Supponiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

converga, anche non assolutamente. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge sul segmento uniformemente $s \subset \mathbb{C}$ di estremi $[0, z_0]$.

Dimostrazione. ($z_0 = 1$)

Poiché la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge, per il criterio 9.4.1, $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ e $\forall p \geq 1$ si abbia

$$|R_{n,p}| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \qquad (*)$$

Allora $\forall z \in [0,1]$ si ha

$$|R_{n,p}(z)| = |a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots + a_{n+p}z^{n+p}| =$$

Ma $\forall n, i \quad a_{n+i} = R_{n,i} - R_{n,i-1}$, per cui sostituendo si ottiene

$$= |R_{n,1}z^{n+1} + (R_{n,2} - R_{n,1})z^{n+2} + \cdots + (R_{n,p} - R_{n,p-1})z^{n+p}| =$$
$$= |R_{n,1}(z^{n+1} - z^{n+2}) + R_{n,2}(z^{n+2} - z^{n+3}) + \cdots + R_{n,p}z^{n+p}| \leq$$

poiché $z \in [0,1]$ si ha che $\forall k \quad z^k > z^{k+1}$. Allora, applicando la diseguaglianza triangolare:

$$\leq |R_{n,1}|(z^{n+1} - z^{n+2}) + |R_{n,2}|(z^{n+2} - z^{n+3}) + \cdots + |R_{n,p}|z^{n+p} \leq$$

Dato che la condizione $(*)$ vale per ogni n, p, segue che

$$\leq \epsilon(z^{n+1} - z^{n+2}) + \epsilon(z^{n+2} - z^{n+3}) + \cdots + \epsilon z^{n+p} =$$
$$= \epsilon(z^{n+1} - z^{n+2} + z^{n+2} - \cdots + z^{n+p}) = \epsilon z^{n+1} \leq \epsilon$$

Essendo l'ultima diseguaglianza giustificata dal fatto che $z^{n+1} < 1$ poiché $z \in [0,1]$. Quindi si conclude che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge uniformemente in $[0,1]$. □

Dimostrazione. ($z_0 \neq 1$)

Pongo $z = \lambda z_0$, con $\lambda \in [0,1]$ e dunque $z \in s$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$$

dove $b_n = a_n z_0^n$. Ci riconduciamo così al caso precedente nella variabile $\lambda \in [0,1]$. Poiché la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

converge per ipotesi, per la dimostrazione precedente, segue che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$$

converge uniformemente in $[0,1]$. Dunque $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ e $\forall p \geq 1$ si abbia

$$|b_{n+1}\lambda^{n+1} + \cdots + b_{n+p}\lambda^{n+p}| < \epsilon$$

Ma allora

$$|R_{n,p}(z)| = |a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_{n+p}z^{n+p}| = |a_{n+1}(\lambda z_0)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(\lambda z_0)^{n+p}| =$$
$$= |(a_{n+1}z_0^{n+1})\lambda^{n+1} + \cdots + (a_{n+p}z_0^{n+p})\lambda^{n+p}| =$$
$$= |b_{n+1}\lambda^{n+1} + \cdots + b_{n+p}\lambda^{n+p}| < \epsilon$$

□