Il grado di Lefschetz

Martino De Leo

1 Maggio 2013

Sommario

Questo seminario comincia con alcuni preliminari dal gusto puramente algebrico riguardanti la costruzione della traccia per mappe di catene e alla dimostrazione del teorema di Hopf; ciò permette di dimostrare l'invarianza omotopica della caratteristica di Eulero e di costruire il grado di Lefschetz e dimostrarne le implicazioni topologiche.

La seconda parte è dedicata alle relazioni del grado di Lefschetz con altri invarianti e alla sua applicazioni in ambiti classici della topologia algebrica come l'omologia degli spazi proiettivi reali e spazi aciclici.

1 Teorema della traccia di Hopf

Iniziamo con qualche preliminare di algebra commutativa. Sia $A \in R^{n\times n}$ una matrice quadrata a entrate in un anello R commutativo con unità. La **traccia** di A è definita come la somma dei suoi elementi diagonali: $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Il fatto che la traccia sia un invariante (non completo) per similitudine deriva dal seguente risultato lievemente più forte: se $A, B \in R^{n\times n}$ allora $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Infatti per ogni $1 \leq k \leq n$ il k-esimo elemento diagonale del prodotto AB è $(AB)_{kk} = \sum_{j=1}^n a_{kj}b_{jk} = A_k \cdot B^k$, mentre $(BA)_{kk} = \sum_{j=1}^n b_{kj}a_{jk} = B_k \cdot A^k$, da cui segue $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \operatorname{tr}(BA)$. E questo implica dunque che se B è invertibile[1] allora $\operatorname{tr}\left(BAB^{-1}\right) = \operatorname{tr}(A)$.

Sia adesso G un gruppo abeliano libero finitamente generato di rango n e $\phi : G \to G$ un endomorfismo. Scelta una base per G, ϕ ammette una rappresentazione mediante una matrice quadrata di ordine n a coefficienti interi, e si definisca $\operatorname{tr}(\phi)$ come la traccia di questa matrice; dall'osservazione precedente segue che questa è una buona definizione. Non solo: se $\psi : G \to G'$ è un isomorfismo allora $\eta := \psi\phi\psi^{-1}$ è un endomorfismo di G' e come sopra si trova che $\operatorname{tr}(\eta) = \operatorname{tr}(\phi)$.

Veniamo alle applicazioni in ambito omologico. Se $\mathcal{C} = \{C_n\}_n$ è un complesso di catene libero e finitamente generato e $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è una mappa di catene (di grado zero), si può indicare colla suggestiva notazione $\operatorname{tr}(\phi, C_n)$ la traccia di ϕ in dimensione n.

Inoltre $\phi_* : H_n \to H_n$ è anch'esso un omomorfismo di gruppi abeliani finitamente generati, ma in generale questi non sono liberi. D'altronde son fatti generalmente validi su R-moduli i seguenti:

- gli omomorfismi conservano la parte di torsione: se $f : M \to N$ è un omomorfismo di R-moduli allora $f(T(M)) \subseteq T(N)$;
- $M/T(M)$ è un R-modulo libero;

dacché è possibile definire la traccia di un omomorfismo indotto da una mappa di catene in "omologia modulo torsione" considerando l'omomorfismo indotto da ϕ_* sul quoziente (libero, stavolta) $\widetilde{\phi}_* : H_n/T_n \to H_n/T_n$, ove si è posto $T_n := T(H_n)$ per alleggerire la notazione.

Ad una prima analisi non è immediato stabilire un legame puntuale tra $\operatorname{tr}(\phi, C_n)$ e $\operatorname{tr}\left(\widetilde{\phi}_*, H_n/T_n\right)$, ma d'altronde vale il seguente utile

Teorema 1 (della traccia di Hopf)**.** *Se $\mathcal{C}$ è un complesso di catene finito*[2] *e $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è una mappa di catene, allora*

$$\sum_n (-1)^n tr(\phi, C_n) = \sum_n (-1)^n tr\left(\widetilde{\phi}_*, H_n/T_n\right)$$

[1] ossia $\det(B) \in U(R)$.

[2] ossia tale che $C_n = 0 \quad \forall n \geq \eta$ per un certo η e che tutti i gruppi di catene siano finitamente generati; affinché il complesso di catene associato a un complesso geometrico (simpliciale, Δ-, o CW-) verifichi queste ipotesi è sufficiente che il complesso geometrico abbia dimensione finita e un numero finito di simplessi o celle in ogni dimensione.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo risultato, che sarà utilizzato plurime volte nel seguito, si compone di una prima osservazione algebrica valida in un contesto più generale, che poi viene applicata quando in un secondo momento si reinterpetano certi “fattori” che compongono gli addendi della sommatoria. Si noti anche che l'ipotesi di finitezza del complesso è funzionale alla buona definizione di ambo i membri nella tesi.

Fatto. *Sia G un gruppo abeliano libero finitamente generato, $\phi : G \to G$ un omomorfismo e $H < G$ un sottogruppo*[3] *tale che G/H sia libero e che $\phi(H) \subseteq H$; affermiamo che $tr(\phi, G) = tr\left(\phi_{|H}, H\right) + tr\left(\widetilde{\phi}, G/H\right)$.*

Sia $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ una base per H e $\beta_1 + H, \ldots, \beta_s + H$ una base per G/H. Verifichiamo che $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ è una base per G. Essi generano, perché ogni elemento $g \in G$ sta in uno e un solo laterale di H in G, diciamo $g \in \beta_{i_g} + H$, ossia $g = \beta_{i_g} + h$ per un certo $h \in H$; ma d'altronde $h = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r$ per certi (unici) $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. E sono pure indipendenti (sugli interi) perché

$$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r + \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s = 0 \Rightarrow \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s \in H \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu_1(\beta_1 + H) + \cdots + \mu_s(\beta_s + H) = 0 \in G/H \Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_s = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Si considerino a questo punto i valori di ϕ su questa base: $\phi(\alpha_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij}\alpha_i$ e $\phi(\beta_j) = \sum_{i=1}^s b_{ij}\beta_i + h_j$ per certi $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}$ e certi $h_j \in H$; cosicché $A := (a_{ij})$ e $B := (b_{ij})$ siano le matrici associate a $\phi_{|H}$ e $\widetilde{\phi}$, rispettivamente.

Dunque la matrice di ϕ ha la forma

$$\begin{pmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

la cui traccia è $\mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$, da cui l'asserzione voluta.

Applichiamo questo risultato al nostro caso specifico. Per ipotesi i gruppi abeliani del complesso di catene sono liberi e finitamente generati in ogni dimensione (e definitivamente nulli). Si ha la catena di sottogruppi del gruppo delle n-catene

$$B_n < W_n < Z_n < C_n$$

dove

- B_n è il sottogruppo degli n-bordi;
- Z_n è il sottogruppo degli n-cicli;
- W_n è il sottogruppo degli n-bordi **deboli**, ossia quelle n-catene per cui un opportuno multiplo non nullo è un bordo. Riformulando algebricamente tale definizione, $W_n = \sqrt{B_n}$.

Che ogni bordo debole sia anche un ciclo si vede facilmente: se $c_n \in C_n$ e $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ sono tali che $mc_n = \partial(c_{n+1})$ per un certo $c_{n+1} \in C_{n+1}$ allora $0 = \partial\partial(c_{n+1}) = m\partial(c_n) \Rightarrow \partial(c_n) = 0$, visto che $\mathbb{Z}$ è un dominio d'integrità.

Affermiamo che ogni mappa di catene sul complesso $\mathcal{C}$ conserva questi sottogruppi, e che i quozienti C_n/Z_n e Z_n/W_n sono liberi.

La prima affermazione resta da esser verificata solo sui bordi deboli. Sia $c_n \in W_n$ colle stesse notazioni di poco sopra. Allora

$$m\phi(c_n) = \phi(mc_n) = \phi\partial(c_{n+1}) = \partial\phi(c_{n+1}) \in B_n,$$

ossia $\phi(c_n) \in W_n$.

L'operatore bordo può esser abbreviato alla sua immagine rendendolo surgettivo; il suo nucleo è $\ker \partial_n = Z_n$ e passa al quoziente con un isomorfismo $\delta := \widetilde{\partial}_{|B_{n-1}}$ come nel seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_{|B_{n-1}}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[dl, dashed, shift left, "\delta"] \\ C_n/Z_n \arrow[ur, dashed, shift left] & \end{tikzcd}$$

[3]si ricordi che ogni sottogruppo di un gruppo libero è libero a sua volta.

Dunque $C_n/Z_n \simeq B_{n-1}$, che è un sottogruppo di un gruppo libero, sicché è libero. Inoltre dato che ϕ commuta con l'operatore bordo, commuta anche con δ, nel senso che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} C_n/Z_n & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & C_n/Z_n \\ \delta\downarrow & & \downarrow\delta \\ B_{n-1} & \xrightarrow{\phi_{|B_{n-1}}} & B_{n-1} \end{array}$$

è commutativo; difatti

$$\delta\widetilde{\phi}(c_n + Z_n) = \delta\left(\phi(c_n) + Z_n\right) = \partial\phi(c_n) = \phi\partial(c_n) = \phi\delta(c_n + Z_n).$$

Per quanto visto all'inizio dunque

$$\operatorname{tr}\left(\widetilde{\phi}, C_n/Z_n\right) = \operatorname{tr}\left(\delta^{-1}\phi\delta, C_n/Z_n\right) = \operatorname{tr}\left(\phi, B_{n-1}\right). \tag{1}$$

Adesso consideriamo l'altro quoziente. La composizione delle due proiezioni

$$Z_n \xrightarrow{p} Z_n/B_n = H_n \xrightarrow{q} H_n/T_n$$

è surgettiva e il suo nucleo è

$$\ker qp = (qp)^{-1}(0) = p^{-1}\left(q^{-1}(0)\right) = p^{-1}(T_n) = \sqrt{B_n} \cap Z_n = W_n$$

allora qp passa al quoziente con un isomorfismo $\psi := \widetilde{qp} : Z_n/W_n \to H_n/T_n$ sicché Z_n/W_n è libero, come volevasi.

Infine ϕ commuta con p e q come nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{\phi} & Z_n \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ H_n & \xrightarrow{\phi_*} & H_n \\ q\downarrow & & \downarrow q \\ H_n/T_n & \xrightarrow{\widetilde{\phi_*}} & H_n/T_n \end{array}$$

e da questo segue che ϕ commuta con ψ nel senso del diagramma

$$\begin{array}{ccc} Z_n/W_n & \xrightarrow{\phi} & Z_n/W_n \\ \psi\downarrow & & \downarrow\psi \\ H_n/T_n & \xrightarrow{\widetilde{\phi_*}} & H_n/T_n \end{array}$$

infatti

$$\begin{aligned} \psi\phi(z_n + W_n) = \psi\left(\phi(z_n) + W_n\right) = qp\phi(z_n) + T_n = q\phi p(z_n) + T_n = \\ \phi\left(qp(z_n)\right) + T_n = \widetilde{\phi_*}\left(qp(z_n) + T_n\right) = \widetilde{\phi_*}\psi(z_n + W_n). \end{aligned}$$

E da ciò segue infine che

$$\operatorname{tr}\left(\phi, Z_n/W_n\right) = \operatorname{tr}\left(\psi^{-1}\widetilde{\phi_*}\psi, Z_n/W_n\right) = \operatorname{tr}\left(\widetilde{\phi_*}, H_n/T_n\right) \tag{2}$$

Adesso usiamo il fatto dimostrato all'inizio della prova per ottenere

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\phi, C_n\right) = \operatorname{tr}\left(\phi, C_n/Z_n\right) + \operatorname{tr}\left(\phi, Z_n\right) = \\ = \operatorname{tr}\left(\phi, C_n/Z_n\right) + \operatorname{tr}\left(\phi, W_n\right) + \operatorname{tr}\left(\phi, Z_n/W_n\right) = \text{(per la 1)} \\ = \operatorname{tr}\left(\phi, B_{n-1}\right) + \operatorname{tr}\left(\phi, W_n\right) + \operatorname{tr}\left(\phi, Z_n/W_n\right) = \text{(per la 2)} \\ = \operatorname{tr}\left(\phi, B_{n-1}\right) + \operatorname{tr}\left(\phi, W_n\right) + \operatorname{tr}\left(\widetilde{\phi_*}, H_n/T_n\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Dopodiché, per concludere, non resta che reinterpretare l'addendo di mezzo. La forma debole del Teorema di struttura pei gruppi abeliani finitamente generati, applicata a $B_n < W_n$, dà che esiste una base $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in W_n$ tale che per opportuni $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{Z}$, con $s \le t$ e senza perdita di generalità i λ_i non nulli, si abbia che $\lambda_1\alpha_1, \ldots, \lambda_s\alpha_s$ sia una base per B_n. Ora si osserva che

$$W_n/B_n = \sqrt{B_n}/B_n$$

è di torsione, nel senso che $T(W_n/B_n) = W_n/B_n$, quindi dev'essere $s = t$, altrimenti W_n/B_n conterrebbe un sottogruppo libero non banale. Sul gruppo dei bordi deboli

$$\phi(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}\alpha_j \tag{4}$$

per certi (unici) $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, che determinano ϕ; mentre sul sottogruppo dei bordi

$$\phi(\lambda_i\alpha_i) = \sum_{j=1}^{t} b_{ij}(\lambda_j\alpha_j) \tag{5}$$

giacché abbiam visto sopra che $\phi(B_n) \subseteq B_n$. Ora, moltiplicando le (4) per λ_i si trova

$$\lambda_i\phi(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_i a_{ij}\alpha_j$$

e usandovi le (5) otteniamo

$$\phi(\lambda_i\alpha_i) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_i a_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j b_{ij}\alpha_j$$

e ora il fatto che gli α_i costituiscano una base per W_n implica che

$$\lambda_j b_{ij} = \lambda_i a_{ij} \qquad (\forall i, j = 1, \ldots, t).$$

Di queste ultime, considerando solo le equazioni "diagonali", otteniamo

$$\lambda_i b_{ii} = \lambda_i a_{ii} \quad (\forall i = 1, \ldots, t) \quad \Leftrightarrow \quad b_{ii} = a_{ii} \quad (\forall i = 1, \ldots, t)$$

e dunque

$$\mathrm{tr}\,(\phi, W_n) = \sum_{i=1}^{t} a_{ii} = \sum_{i=1}^{t} b_{ii} = \mathrm{tr}\,(\phi, B_n)\,. \tag{6}$$

Quest'ultimo risultato permette di concludere, perché sostituito nella (3) dà

$$\mathrm{tr}\,(\phi, C_n)\,, = \mathrm{tr}\,(\phi, B_{n-1}) + \mathrm{tr}\,(\phi, B_n) + \mathrm{tr}\left(\widetilde{\phi_*}, H_n/T_n\right)$$

e facendo la somma alternata di quest'ultimo, per elisione si ottiene

$$\sum_n (-1)^n \mathrm{tr}\,(\phi, C_n) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}\left(\widetilde{\phi_*}, H_n/T_n\right),$$

che è la tesi. □

1.1 Invarianza omotopica della caratteristica di Eulero

Vediamo subito un'applicazione del teorema appena dimostrato. In questa sottosezione i termini "complesso" e "complesso di catene" possono indicare equivalentemente "Δ-complesso", "CW-complesso" oppure "complesso simpliciale" e i complessi di catene sottostanti, rispettivamente.

Per un complesso finito X, la sua **caratteristica di Eulero** $\Omega(X)$ è definita come la somma alternata del numero di celle o simplessi in ogni dimensione:

$$\Omega(X) := \sum_n (-1)^n \mathrm{rk}\,(C_n(X))\,.$$

L'ipotesi di finitezza del complesso permette che questa sia una buona definizione; nel caso dei complessi simpliciali questa formula estende la ben nota

$$\text{vertici} - \text{lati} + \text{facce}$$

usata per superfici triangolate.

Definendo $\beta_n := \mathrm{rk}\,(H_n(X)/T_n(X))$, il **numero di Betti** di X in dimensione n, si ottiene una successione di naturali (definitivamente nulla) che è per costruzione un invariante omotopico sulla classe dei complessi (finiti) scelta.

Affermiamo a questo punto che

$$\Omega(X) = \sum_n (-1)^n \beta_n,$$

da cui discende immediatamente che anche la caratteristica di Eulero è costante sulle classi di equivalenza omotopica. Basti infatti osservare che $\mathrm{tr}\,(\mathbf{1}_{C_n}, C_n(X)) = \mathrm{rk}\,(C_n(X))$ e che $\mathrm{tr}\,((\mathbf{1}_{C_n})_*, H_n(X)/T_n(X)) = \beta_n$, e a questo punto si applichi il teorema della traccia alla mappa di catene $\mathbf{1}_{C_n} : C_n \to C_n$.

2 Grado di Lefschetz e Teorema del punto fisso

Sia K un complesso simpliciale finito, e $h : |K| \to |K|$ una mappa continua. Si definisce **grado di Lefschetz** di h il numero

$$\Lambda(h) := \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}\left(\widetilde{h_*}, H_n(K)/T_n(K)\right)$$

Osservazione. Se h è simpliciale[4], per il Teorema della traccia di Hopf

$$\Lambda(h) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}\left(h_\sharp, C_n(K)\right).$$

Osservazione. $\Lambda(h)$ dipende soltanto dalla classe di omotopia di h.

Osservazione. $\Lambda(h)$ non dipende dal complesso simpliciale K ma solo dallo spazio topologico sottostante $|K|$. Infatti se L è un altro complesso simpliciale tale che $|L| = |K|$ allora sappiamo che $\left(\mathbf{1}_{|K|}\right)_* : H_n(K) \to H_n(L)$ è un isomorfismo, e per funtorialità

$$\left(\mathbf{1}_{|K|}\right)_* \circ h_*^{(K)} \circ \left(\mathbf{1}_{|K|}\right)_*^{-1} = h_*^{(L)},$$

quindi per un' osservazione precedente $h_*^{(K)}$ e $h_*^{(L)}$ hanno la stessa traccia e a maggior ragione dunque le mappe che inducono sulla parte libera dell'omologia.

Dopo queste osservazioni preliminari illustriamo il risultato centrale di questo seminario; se fin qui l'ambito è stato puramente algebrico, adesso vedremo una importante conseguenza di ordine topologico.

Teorema 2 (del punto fisso di Lefschetz)**.** *Sia K un complesso simpliciale finito e $h : |K| \to |K|$ una mappa continua. Se $\Lambda(h) \neq 0$ allora h ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo che $h(x) \neq x$ ($\forall x \in |K|$) e mostriamo che in tal caso $\Lambda(h) = 0$.

Passo 1: assunzioni fattibili. Mostriamo che h non solo non ha punti fissi ma non fissa alcuna stella chiusa[5] del complesso K, ossia che per ogni $v \in K$ vertice:

$$h\left(\overline{\mathrm{St}}\,(v, K)\right) \cap \overline{\mathrm{St}}\,(v, K) = \emptyset$$

Vediamo: dato che K è finito abbiamo che $|K|$ è compatto, e allora esiste $\varepsilon = \min_{|K|} \|x - h(x)\|$; poiché h non ha punti fissi è $\varepsilon > 0$. Inoltre per Heine-Cantor h è uniformemente continua su $|K|$ quindi in particolare esiste $\delta > 0$ tale che $\|h(x) - h(y)\| < \varepsilon/2 \;\Leftarrow\; \|x - y\| < \delta$.

Posto $\mu := \min\{\delta, \varepsilon/2\}$, si ha che per ogni $A \subseteq |K|$ se $\mathrm{diam}\,(A) < \mu$ allora vale sia per A che per il suo trasformato $\mathrm{diam}\,(A), \mathrm{diam}\,(h(A)) < \varepsilon/2$. D'altronde comunque scelto $x \in A$ abbiamo che $\|x - h(x)\| \geq \varepsilon$ e dunque $A \cap h(A) = \emptyset$.

Ecco dunque che, a meno di scegliere una suddivisione di K tale che ogni simplesso abbia diametro minore di μ, si ha la condizione voluta.

Passo 2: condizione di spostamento. Esiste una suddivisione K' di K tale che la mappa continua h ammetta un'approssimazione simpliciale[6] $f : K' \to K$; e si può supporre senza perdita di generalità che la condizione del passo precedente sia ancora verificata.

Affermiamo che f sposta non solo i vertici, ma anche i simplessi nel senso proprio dei sottospazi topologici:

$$(\forall \sigma' \in K',\ \sigma \in K,\ \sigma' \subseteq \sigma) \quad f(\sigma') \neq \sigma.$$

[4] vedremo una generalizzazione di ciò nel corso della dimostrazione del teorema del punto fisso.

[5] per ogni vertice $v \in K$ di un complesso simpliciale la **stella aperta** di K centrata in v è definita come l'unione degli interni di tutti i simplessi che hanno v come vertice e si indica con $\mathrm{St}\,(v)$; l'unione di tutti i simplessi di K aventi v come vertice si chiama invece **stella chiusa** ed è indicata con $\overline{\mathrm{St}}\,(v)$; come spazi topologici, la stella chiusa coincide con la chiusura della stella aperta.

[6] Una mappa simpliciale è una applicazione tra complessi simpliciali che manda vertici in vertici, e dunque simplessi in simplessi. Un'approssimazione simpliciale di h mappa continua è una mappa simpliciale f tale che $h\,(\mathrm{St}\,(v, K')) \subseteq \mathrm{St}\,(f(v), K)$. L'esistenza di approssimazioni simpliciali per ogni mappa continua si dimostra attraverso un uso astuto delle suddivisioni baricentriche; la buona definizione dell'omomorfismo indotto in omologia da una mappa continua come la composizione (a livello di catene) di f con l'operatore di suddivisione λ discende da due fatti: per ogni altra scelta g dell'approssimazione simpliciale di h esiste un'omotopia di catene tra f e g, e se $i : K' \to K$ è un'approssimazione simpliciale dell'identità di $|K|$ allora i e λ sono inverse omotopiche di catene.

Supponiamo per assurdo che σ e σ' siano come sopra ma $f(\sigma') = \sigma$. Prendiamo un vertice $w \in \sigma'$ e poniamo $v := f(w)$; allora v è un vertice di σ, e abbiamo che $w \in \sigma' \subseteq \sigma \subseteq \overline{\mathrm{St}}\,(v, K)$, da cui ovviamente $h(w) \in h\left(\overline{\mathrm{St}}\,(v,K)\right)$. D'altronde per approssimazione simpliciale abbiamo

$$h\left(\mathrm{St}\,(w, K')\right) \subseteq \mathrm{St}\,(f(w), K) = \mathrm{St}\,(v, K)\,,$$

quindi $h(w) \in h\left(\overline{\mathrm{St}}\,(v,K)\right)$, ciò che è assurdo in quanto contraddice il passo precedente dal momento che

$$h(w) \in \overline{\mathrm{St}}\,(v,K) \cap h\left(\overline{\mathrm{St}}\,(v,K)\right) = \emptyset.$$

Passo 3: applicazione del teorema della traccia. Sia adesso $f : K' \to K$ un'approssimazione simpliciale di h, continuino a valere le condizioni dei due passi precedenti, e sia $\lambda : C_n(K) \to C_n(K')$ l'operatore di suddivisione; sappiamo che in tal caso l'omomorfismo h_* indotto in omologia è quel che passa al quoziente della mappa di catene $\varphi := f_\sharp \circ \lambda$.

Si consideri la base canonica di $C_n(K)$ costituita dagli n-simplessi di K; sia σ uno di questi. Allora $\lambda(\sigma)$ è una catena finita di sottosimplessi di σ nel complesso K', diciamo $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$, e per il punto precedente vale

$$f_\sharp(\sigma_i) \neq \sigma \qquad (\forall i = 1, \ldots, t)$$

Ma allora tutti gli elementi diagonali della matrice associata a $\varphi = f_\sharp \circ \lambda$ sono nulli, e in particolare $\mathrm{tr}\,(\varphi, C_n(K)) = 0$; d'altro canto per il teorema della traccia abbiamo[7]

$$\Lambda(h) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}\,(\varphi, C_n(K))\;\;,$$

e ciò conclude. □

2.1 Caso aciclico

Ogni spazio contrattile è anche aciclico[8] per l'invarianza omotopica dell'omologia; il viceversa in generale è falso[9]. In particolare, contrattili sono i convessi di $\mathbb{R}^n$ e dunque i dischi D^n.

Un importante fatto topologico che si può dimostrare tramite l'omologia è il seguente:

Lemma 1. *D^n non si retrae per deformazione sul suo bordo $\partial D^n \simeq S^{n-1}$.*

Dimostrazione. Supponendo per assurdo che $R : D^n \times I \to S^{n-1}$ sia una retrazione per deformazione, sappiamo che la retrazione $r := R(\cdot, 1) : D^n \to S^{n-1}$ è un'equivalenza omotopica e una sua inversa è l'inclusione $\iota : S^{n-1} \to D^n$; esse dunque inducono isomorfismi in omologia. La sequenza esatta lunga della coppia allora dà

$$\cdots \to \widetilde{H}_n\left(D^n\right) \to H_n\left(D^n, S^{n-1}\right) \to \widetilde{H}_{n-1}\left(S^{n-1}\right) \xrightarrow{\iota_*} \widetilde{H}_{n-1}\left(D^n\right) \to \cdots\,,$$

il che è assurdo, poiché $\widetilde{H}_k\left(S^k\right) \simeq \mathbb{Z}$ per ogni k, mentre D^n è aciclico. □

Un altro argomento è il seguente. Di nuovo nelle ipotesi dell'assurdo di cui sopra in cui $\iota : S^{n-1} \to D^n$ è l'inclusione e $r : D^n \to S^{n-1}$ è la retrazione (data dalla deformazione) si ha che $r\iota = \mathbf{1}_{S^{n-1}}$. Si consideri che in omologia abbiamo

$$\widetilde{H}_{n-1}\left(S^{n-1}\right) \xrightarrow{\iota_*} \widetilde{H}_{n-1}\left(D^n\right) \xrightarrow{r_*} \widetilde{H}_{n-1}\left(S^{n-1}\right) \tag{7}$$

e d'altronde per funtorialità

$$r_* \circ \iota_* = (r \circ \iota)_* = \left(\mathbf{1}_{S^{n-1}}\right)_* = \mathbf{1}_{\widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1})} \simeq \mathbf{1}_{\mathbb{Z}},$$

ciò che è di nuovo assurdo perché il fattore di mezzo nella (7) è nullo, sicché questa composizione non può essere l'identità.

Dal lemma appena dimostrato discende pressoché immediatamente un risultato assai importante:

Teorema 3 (del punto fisso di Brouwer)**.** *Ogni funzione continua $f : D^n \to D^n$ ammette un punto fisso.*

Dimostrazione. Se per assurdo così non fosse, il vettore $x - f(x)$ non sarebbe mai nullo, consentendo di definire l'applicazione

$$D^n \times I \ni (x,t) \;\mapsto\; t\frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} + (1-t)x$$

che sarebbe una retrazione per deformazione di D^n sul suo bordo, contro il lemma precedente. □

[7] cfr. nota a p.5.

[8] ovvero la sua omologia ridotta è ovunque nulla.

[9] controesempi (non semplici) sono dati dalle sfere di omologia (p.es. la sfera di Poincaré).

2.1.1 Il teorema di Lefschetz generalizza quello di Brouwer

A questo punto, visti due teoremi che danno condizioni sufficienti per l'esistenza di un punto fisso, sorge spontanea la domanda: *"che relazione c'è tra i due?"*.

Prima di dare la risposta, bisogna[10] premettere uno strumento:

Lemma 2. *Sia K un complesso simpliciale e $h : |K| \to |K|$ una funzione continua.*
Se $|K|$ è connesso per archi allora $h_* : H_0(K) \to H_0(K)$ è l'identità $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$.

Dimostrazione. Sia $f : K' \to K$ un'approssimazione simpliciale di h, e $\lambda : C_n(K) \to C_n(K')$ l'operatore di suddivisione. Allora $h_* = f_* \circ \lambda_*$ dato che è indotto dalla mappa di catene $\varphi := f_\sharp \circ \lambda$.

Sulla base standard di $C_n(K)$, λ manda un vertice v in una 0-catena portata da v; dev'esser quindi $\lambda(v) = tv$ per qualche $t \in \mathbb{Z}$. D'altronde λ preserva l'aumentazione, ovvero $\epsilon\lambda = \epsilon$, quindi

$$1 = \epsilon(v) = \epsilon\lambda(v) = \epsilon(tv) = t$$

e questo prova che in dimensione zero[11] λ è l'immersione di $C_0(K)$ dentro $C_0(K')$.

Ora, per connessione[12] $f_\sharp(v) = f_\sharp\lambda(v)$ è omologo a v, quindi $\varphi_* = h_*$ è l'identità su $H_0(K)$. □

A questo punto, per ottenere la nostra affermazione è sufficiente applicare il teorema di Lefschetz alla luce del lemma appena dimostrato, e ricordare che i dischi sono aciclici.

Teorema 4. *Sia K una complesso simpiciale finito e $h : |K| \to |K|$ una funzione continua.*
Se K è aciclico allora h ammette un punto fisso.

Dimostrazione. Essendo $\widetilde{H}_n(K) = 0$ per ogni $n \geq 0$, ovvero $H_0(K) = \mathbb{Z}$ e $H_n(K) = 0$ per ogni $n \geq 1$, in particolare $|K|$ è connesso per archi e pel lemma precedente allora

$$\operatorname{tr}\left(\widetilde{h_*}, H_0/T_0\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}\right) = 1.$$

D'altronde in dimensione positiva gli omomorfismi h_* sono giocoforza tutti nulli sicché le tracce sono zero, da cui $\Lambda(h) = 1$ poiché nella sommatoria solo il primo addendo è non nullo. Dal teorema del punto fisso di Lefschetz segue la tesi. □

2.2 Mappe sulla sfera

Vediamo la relazione che intercorre tra il grado di Lefschetz e il grado di mappe sulla sfera (relazione molto semplice, in verità).

Sia $f : S^n \to S^n$ con $n \geq 1$. Posto $d := \deg(f)$, avendosi che la sfera è connessa per archi, per il lemma precedente f_* è l'identità in dimensione zero; i restanti gruppi di omologia sono tutti nulli tranne $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ sul quale la matrice di

$$\left(\widetilde{f_*}, H_n(S^n)/T_n(S^n)\right) = (f_*, H_n(S^n))$$

è il solo intero d. Quindi

$$\Lambda(f) = 1 + (-1)^n d \qquad \text{ovvero} \qquad \deg(f) = (-1)^n \left(\Lambda(f) - 1\right).$$

Questa relazione non è soltanto utile per stabilire quando una mappa sulla sfera ha un punto fisso semplicemente guardando il suo grado, ma anche per ritrovare un risultato noto sul grado della mappa antipodale: infatti $a : x \mapsto -x$ non ha punti fissi, dunque pel teorema di Lefschetz dev'essere $\Lambda(a) = 0$, da cui $\deg(a) = (-1)^{n+1}$. Anzi, si vede facilmente a questo punto che una condizione sufficiente affinché $f : S^n \to S^n$ ammetta punto fisso è che $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$.

[10] Tale complicazione ulteriore è dovuta alla "macchinosità" con cui è costruita l'omologia simpliciale, che è anche la stessa che per poter dimostrare la buona definizione degli omomorfismi indotti dalle mappe continue in omologia richiede di passare attraverso le suddivisioni baricentriche e le approssimazioni simpliciali. Notiamo incidentalmente che in omologia singolare questo risultato sarebbe stato pressoché immediato.

[11] ciò che è falso in dimensione positiva.

[12] l'argomento è analogo a quello usato in omologia singolare, a parte la "complicazione" ulteriore che consiste nel dover trovare cammini composti da 1-simplessi.

2.3 Spazi proiettivi di dimensione pari

Abbiamo calcolata l'omologia degli spazi proiettivi reali:

$$H_p\left(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & \text{per } 0 < p < n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z} & \text{per } p = 0 \text{ (e per p=n se dispari)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si può quindi dire che se $n = 2k$ pari allora $\mathbb{P}^n$ è "aciclico modulo torsione" nel senso che

$$H_p(\mathbb{P}^n)/T_p(\mathbb{P}^n) = 0 \quad (\forall p \geq 1)$$

e d'altronde $\mathbb{P}^n$ è connesso per archi quindi un argomento del tutto analogo al precedente mostra che

Teorema 5. *Se n è pari, allora ogni mappa continua $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ammette un punto fisso.*

2.4 Omeomorfismi simpliciali

Vediamo ora un'ultima applicazione, riguardante il rapporto del grado di Lefschetz con la caratteristica di Eulero di un particolare sottospazio legato ad omeomorfismi simpliciali.

Teorema 6. *Sia X un complesso simpliciale finito e $f : X \to X$ un omeomorfismo simpliciale. Sia $F \subseteq X$ l'insieme dei punti fissi di f, e supponiamo[13] che F sia un sottocomplesso simpliciale di X.*

Allora $\Lambda(f) = \Omega(F)$.

In particolare $\Lambda(f)$ coincide con la cardinalità di F quando i punti fissi di f sono isolati. Questo teorema è una generalizzazione dei due casi estremi in cui $f = \mathbf{1}_X$ (e dunque $F = X$) e in cui f non ha alcun punto fisso.

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza esatta corta di complessi di catene

$$0 \to C_n(F) \xrightarrow{\iota} C_n(X) \xrightarrow{\pi} C_n(X, F) \to 0.$$

Tale sequenza spacca e $C_n(X, F)$ è libero[14]; inoltre $f_\sharp\left(C_n(F)\right) \subseteq C_n(F)$ banalmente, poiché $f_\sharp : C_n(F) \to C_n(F)$ è l'identità. Allora per un fatto precedente

$$\mathrm{tr}\left(f_\sharp, C_n(X)\right) = \mathrm{tr}\left(f_\sharp, C_n(F)\right) + \mathrm{tr}\left(f_\sharp, C_n(X, F)\right)$$

e d'altro canto $\mathrm{tr}\left(f_\sharp, C_n(F)\right) = \mathrm{rk}\left(C_n(F)\right)$ per quanto appena osservato.

Sia ora σ un n-simplesso di $X \setminus F$ (eventualmente qualche sottosimplesso di σ può stare in F). Essendo f simpliciale, $f(\sigma)$ è un simplesso di X, ed essendo f un omeomorfismo $f(\sigma)$ ha dimensione n; ma a meno di operare una suddivisione analoga a quella del passo 2 nella dimostrazione del teorema di Lefschetz si può supporre che $f(\sigma) \neq \sigma$.

A questo punto una qualunque base di $C_n(X, F)$ ha la forma

$$\sigma_1 + C_n(F), \ldots, \sigma_m + C_n(F)$$

dove i σ_i stanno in $X \setminus F$, quindi per quanto visto sopra sulla diagonale della matrice associata a $f_\sharp : C_n(X, F) \to C_n(X, F)$ ci sono zeri, da cui $\mathrm{tr}\left(f_\sharp, C_n(X, F)\right) = 0$.

In conclusione

$$\Lambda(f) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}\left(f_\sharp, C_n(X)\right) = \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}\left(f_\sharp, C_n(F)\right) = \\ = \sum_n (-1)^n \mathrm{rk}\left(C_n(F)\right) = \Omega(F),$$

ove la prima uguaglianza deriva da un'osservazione precedente dovuta al teorema della traccia di Hopf. □

[13] in realtà questa ipotesi discende dalle altre.

[14] si può vedere anche direttamente: data in generale una coppia simpliciale (K, K') e una base $B = \{\sigma_i\}_i$ per $C_n(K)$ allora una base per $C_n(K')$ è data dal sottoinsieme di B dei simplessi di K' mentre una base per $C_n(K, K')$ è $\{\sigma_i + C_n(K')\}$, ottenuta prendendo i σ_i che **non** stanno in K'.