

Una introduzione grafica e algoritmica all'integrale definito

Didattica della Matematica e Nuove Tecnologie – prof. Franco Favilli

Martino De Leo

6 aprile 2016

1 Introduzione

Destinatari: classi IV e V degli Istituti Tecnici, settore Tecnologico, tutti gli indirizzi.

Prerequisiti: funzioni continue, funzioni costanti a tratti, calcolo elementare delle aree di poligoni, programmazione procedurale e funzionale di base per l'elaborazione e la visualizzazione dei dati.

Obiettivi: Padroneggiare il significato geometrico di area con segno sottesa dal grafico di una funzione, costruire una procedura effettiva al calcolatore che implementi un metodo di quadratura, istruire il calcolatore per visualizzare graficamente i dati ed i passaggi elementari dell'algoritmo.

Tempo medio: 4-8 ore, suddivise in due attività, più una opzionale.

Questo percorso didattico è pensato come introduzione all'*integrale definito*, tipicamente presentato nelle classi quarta o quinta della Scuola Secondaria di Secondo grado, nella variante di Riemann. Il percorso è suddiviso in due attività, la prima (Sezione 2.1) da svolgersi in classe e la seconda (Sezione 2.2) da svolgersi al calcolatore in laboratorio; una terza fase di approfondimento (Sezione 2.3) è suggerita come opzionale.

L'intero percorso è pensato come preliminare alla trattazione rigorosa dell'integrale definito.

Entrambe le fasi principali dell'attività sono pensate come *laboratoriali*, nella declinazione attivistica del termine, per cui le idee proposte vengono discusse in tutto il gruppo-classe cui è stato proposto un problema da risolvere: l'insegnante in tal caso perde il ruolo di "detentore unico" della conoscenza, che attraverso le sue parole "fluisce" verso le studentesse e gli studenti, contenitori "vergini" che si lasciano riempire passivamente. Piuttosto egli od ella assume una posizione più orizzontale e partecipativa, *entra* a far parte del gruppo che sta attivamente affrontando lo sforzo cognitivo offerto dal problema e partecipa *con* la classe alla discussione, indicando le proposte più significative, segnalando i passaggi erronei ed offrendo spunti ulteriori. [10]

Nell'attività si sfrutta massicciamente la potenzialità, fornita dal calcolatore, di rendere i concetti matematici usando un linguaggio *grafico*. Si cerca in tal modo di offrire a studenti e studentesse una rappresentazione "concreta" delle idee che vengono introdotte e manipolate, seppur ad un livello più intuitivo rispetto ad una presentazione più simbolica e formale; infatti, seppure questa seconda forma di approccio ai costrutti della matematica resti indubbiamente un requisito fondamentale per promuovere una "attitudine" matematica avanzata, un linguaggio più immediato e flessibile come quello offerto dalle immagini può coadiuvare e stimolare una riflessione più strutturata,

rivelandone i meccanismi intimi che rischiano di passare inosservati in una trattazione formale, nascosti dalla sintassi e dalla “meccanica” simbolica.¹

Adottando questa prospettiva – attraverso il linguaggio visuale – si è cercato dunque di offrire un antidoto al noto fenomeno del *symbol pushing*, entrando in un terreno concettuale di collegamento che stabilisca un nesso tra l’oggetto di studio astratto ed una sua applicazione concreta alla vita di tutti i giorni, usando come tramite una rappresentazione immediata che non sia soltanto “assorbibile” passivamente ma che sia manipolabile attivamente durante l’intero percorso. In generale è fruttifero agire un tale moto di ampliamento sulla conoscenza, non solo matematica, che renda studentesse e studenti capaci di stabilire collegamenti con la globalità dei saperi:

«Complicate operazioni logiche vengono eseguite senza eseguire le operazioni intellettuali su cui si fondano i simboli logici e matematici. Una meccanizzazione del genere è certamente essenziale all’espansione dell’industria: ma se riveste tutti i processi intellettuali, se la ragione stessa è ridotta alla funzione di uno strumento, diventa un feticcio, un’entità magica che si accetta, più che sperimentarla intellettualmente.» [6, p. 27]

Con ciò non vogliamo assolutamente intendere che sia opportuno rimpiazzare del tutto ogni discussione formale con un approccio esclusivamente intuitivo; una elisione *tout-court* della dimensione teorica porterebbe ad una interpretazione incerta e mal fondata dei costrutti e delle metodologie della matematica, inficiando il carattere linguistico e relazionale della disciplina intera, che pur essendo nella sua essenza fondamentale solo pura astrazione [11] si può vedere anche *come linguaggio*, estremamente efficace nel trasmettere e condividere idee complesse. La teoria è dunque un aspetto necessario, di cui l’attività qui presentata è complemento e non sostituto, in un quadro complessivo in cui la teoria sia elemento attivo all’interno di un processo consapevole di arricchimento di senso. [7]

Si è cercato inoltre di evidenziare in ogni circostanza il carattere *relazionale* delle conclusioni che si possono trarre a proposito degli oggetti considerati, sottolineando cioè come l’intera struttura di conoscenza condivisa che si costruisce in classe tragga importanza e significato dalla rete di *relazioni* che intercorrono tra gli oggetti, il cui comportamento singolo può essere compreso a fondo soltanto se contestualizzato nel quadro delle interazioni globali con gli altri oggetti.

«L’esperienza consiste in primo luogo nelle relazioni attive che sussistono fra un essere umano e il suo ambiente naturale. [...] Proprio nella misura in cui si scorgono dei nessi fra ciò che accade a una persona e ciò che essa fa in risposta, e fra ciò che essa fa al suo ambiente e ciò che questo fa ad essa in risposta, le sue azioni e le cose circostanti acquistano significato.» [4, p. 301]

La seconda fase dell’attività consiste, al suo nucleo, in un esercizio di formulazione di un algoritmo numerico per l’approssimazione dell’integrale e nella implementazione in un linguaggio di programmazione adeguato.²

L’impiego diretto da parte di studenti e studentesse di software ricco di implementazioni di idee matematiche, come programmi di geometria dinamica, fogli di calcolo, visualizzatori etc., permette loro di superare eventuali difficoltà di apprendimento ed aiuta a costruire il proprio sistema di conoscenze nella specifica declinazione personale di ognuno. I metodi *grafici* di manipolazione degli oggetti matematici forniscono un *insight* importante sulle loro caratteristiche e interazioni, aggiungendo all’osservazione/contemplazione la possibilità di un’azione *costruttiva* della mente.

Accanto all’enorme espressività visiva offerta dai software attuali, altri utilizzi didattici del calcolatore come il calcolo simbolico ed i linguaggi di programmazione aprono nuove possibilità soprattutto nell’educazione matematica. Risolvere un compito matematico pensando un algoritmo che porti a termine una procedura complessa e “tradurlo dal linguaggio delle idee” ad un linguaggio di programmazione permette agli studenti e alle studentesse di costruire

¹Se poi all’immediata comprensibilità attraverso la visione si aggiunge la dimensione temporale il potere evocativo e di appropriazione dei concetti aumenta moltissimo; filmati o animazioni interattive puntano precisamente a questo scopo.

²Ovviamente la scelta dello specifico linguaggio dipende dal percorso curricolare seguito dalla classe; nei nostri esempi [3] si sono usati Octave e Gnuplot poiché trattandosi di software Open-Source il loro reperimento ed utilizzo non limitativo è particolarmente adeguato nella scuola.

gli artefatti matematici *mentre* li manipolano; se in aggiunta il linguaggio è interpretato (non compilato) ed offre funzionalità grafiche si avrà un riscontro dell'evoluzione (spesso crescente in complessità) del concetto in esame su una molteplicità di stimoli anziché soltanto sul piano puramente intellettuale, ed una concretizzazione dell'idea astratta. [5, p. 231] Infine, oltre all'accresciuto potenziale di verificabilità empirica del percorso seguito, lo scrivere in gruppo un algoritmo in un linguaggio di programmazione instilla nei partecipanti la necessità di una formalizzazione corretta per comunicare con la macchina e gli altri.

Per questi motivi, e per l'utilizzo fecondo dei linguaggi di programmazione riscontrato nelle attività di *problem solving*, ci si è focalizzati sul *come* designare l'attività di programmazione per la classe piuttosto che *quale* linguaggio usare:

«The empirical evidence shows that it [il calcolatore, NdA] proves more succesful in the educational process when it is used to enhance meaning, either through programming in a language embodying the mathematical processes or through the use of computer environments for exploration and construction of concepts.» [5, p. 243]

2 Attività

Alla descrizione dell'attività didattica che segue è affiancato un software d'esempio [3] che può essere usato a mo' di guida, reperibile all'indirizzo <http://poisson.phc.unipi.it/~deleo/math/dmnt/integra.tar.gz>. Alcuni filmati d'esempio vengono rilasciati nella directory <http://poisson.phc.unipi.it/~deleo/math/dmnt/video>.

2.1 Prima fase

Per introdurre il concetto matematico di *integrale definito* se ne presenta dapprima la nascita ed evoluzione come forma di pensiero, nel quadro storico dello sviluppo del calcolo infinitesimale, stimolato anche dalla formulazione differenziale di problemi nell'ambito della Fisica.

«Ciò [la contestualizzazione storica, NdA] consente di far percepire la matematica come una disciplina che cambia nel tempo.» [9, p. 5]

Si propone poi un problema *in contesto* che introduca l'aspetto più operativo dell'integrale definito, presentato dunque come strumento che risolve i problemi che sorgono “*in tutti quei contesti in cui [almeno] uno dei fattori di un prodotto varia.*” [2, p. 337]

Calcolo dei consumi. Problemi di questo tipo intervengono in situazioni quotidiane; quando ad esempio si vuole calcolare il carburante consumato durante un viaggio in automobile si può utilizzare dapprincipio una formula semplice, come il consumo medio sulla distanza riportato a latere delle campagne pubblicitarie (cfr. Figura 1). Se il mio viaggio parte da Pisa e termina a Piombino con una tappa a Livorno, conoscendo il consumo medio per km (sia α , un esempio di dimensioni è $[\alpha] = 1/100 \text{ km}$), posso ottenere il carburante consumato C moltiplicando per i 115 km percorsi:

$$C = \text{carburante per km} \times \text{distanza percorsa} = \alpha \times 115. \quad (1)$$

Ci si accorge presto però che questo metodo naïf fornisce risultati scadenti se si richiede un certo livello di precisione: il motivo principale – e sul quale si stimola la riflessione in classe – è che il consumo (per unità di tempo, di spazio o altro) dipende fortemente da fattori come la velocità, il numero di giri del motore o l'accoppiamento. L'aspetto chiave da sottolineare è che questi fattori, durante il viaggio preso in esame, *variano*, e con essi varia dunque il consumo *istantaneo* di carburante. Nell'ipotetico viaggio del nostro esempio, sui 25 km della tratta Pisa–Livorno si guiderà tenendo velocità, marcia e numero di giri tendenzialmente assai diversi rispetto al secondo tratto Livorno–Piombino, lungo 90 km; dunque il consumo per km sarà diverso sulle due tratte, ossia i due percorsi daranno contributi unitari diversi al consumo totale.



Figura 1: Un annuncio commerciale di un modello di automobile, recante le indicazioni di consumo medio ed emissioni medie (riquadro evidenziato): «Ciclo combinato: consumo di carburante (l/100 km): da 3,9 - 6,6; emissioni CO₂ (g/km): da 104-154.»

Un altro esempio riguardante l'economia domestica: se una lampadina da 100 W/h sta accesa per 12 ore, si saranno consumati $100 \text{ W/h} \times 12 \text{ h} = 1200 \text{ W}$; se però durante il lasso delle 12 ore la lampadina viene spenta e riaccesa più volte, i contributi di consumo orario *non* saranno tutti uguali, e di questi diversi “pesi” si dovrà tener conto. In questo caso l'andamento del consumo è quello di una funzione costante a tratti (esempio in Figura 2); per estendere in generalità al caso continuo si può pensare di sostituire l'interruttore con un potenziometro.

A questo punto si può stimolare la discussione per far emergere l'analogia con un oggetto già incontrato nel primo biennio [1]: la *media aritmetica pesata* di n elementi $x_0, \dots, x_{n-1}$ con pesi $p_0, \dots, p_{n-1}$. Si può infatti discutere sull'uguaglianza delle due espressioni per la media

$$\frac{1}{P} \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p_i}{P} \cdot x_i, \quad (2)$$

laddove si è indicata con $P = \sum_{i=0}^{n-1} p_i$ la massa totale. Mentre nel membro sinistro si sommano prima tutti i contributi *assoluti* e poi si divide per la massa totale, la seconda espressione rappresenta il fatto che vengono sommati direttamente i singoli contributi *relativi*, in cui ogni peso relativo $0 < p_i/P < 1$ è dimensionalmente un numero puro.

Questa caratterizzazione indica uno dei caratteri relazionali del concetto di *contributo istantaneo*, in questo caso costituito dal consumo di carburante od energia ma ovviamente estendibile in generalità, che è possibile illustrare anche graficamente: i singoli apporti al totale non si possono addizionare *tout-court* perché si deve tener conto del peso di ognuno, cioè della misura relativa di incidenza sul valore totale.

Si può illustrare graficamente questo passaggio portando a due il numero di dimensioni: il metodo unidimensionale corrisponde a sommare grandezze lineari, come p.e. una serie di segmenti che rappresentano i singoli consumi e la cui somma è un segmento che rappresenta il consumo totale. Per visualizzare le variazioni nei contributi si può considerare ogni segmento orizzontale (spazio percorso, tempo trascorso, etc.) come base di un rettangolo la cui altezza misura il contributo relativo di quell'elemento; il (consumo) totale è allora rappresentato dall'*area* totale dei rettangoli.

Si inviti ora la classe a riflettere su questo metodo (illustrato in Figura 2 per l'esempio delle lampadine) ed a metterne alla prova la tenuta, suggerendo interrogativi su due aspetti in particolare:

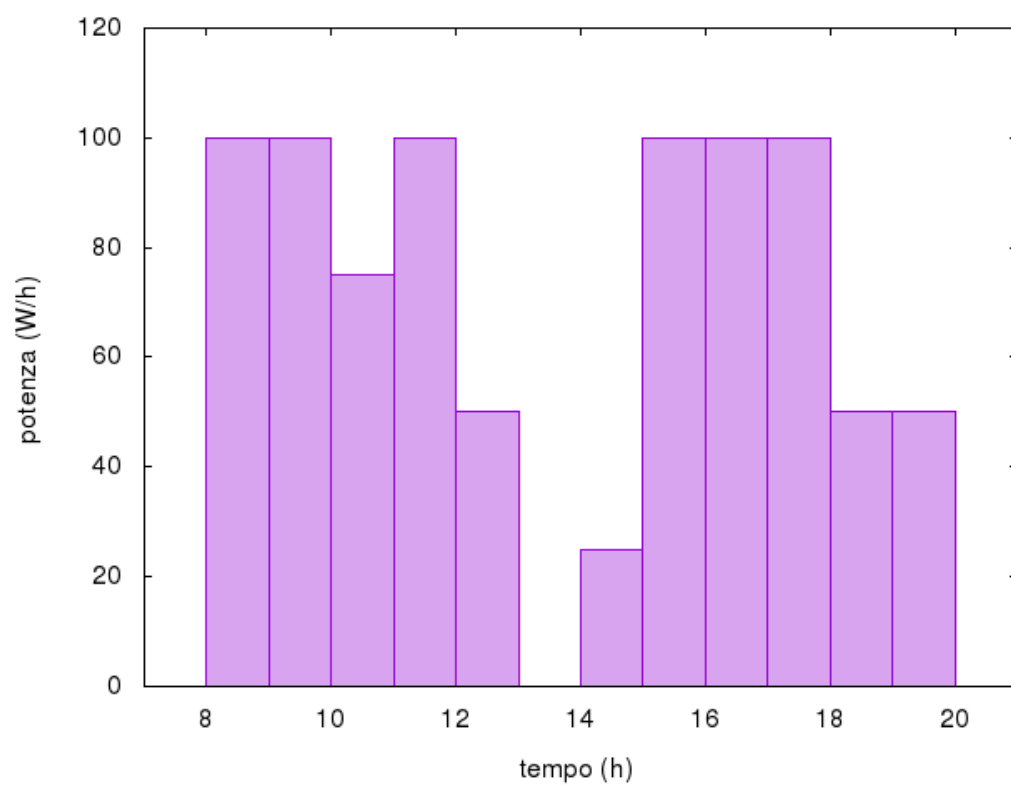


Figura 2: Dal profilo dei consumi orari domestici si può estrapolare il consumo totale considerando che un'ora in cui sta accesa una lampadina da 100 W contribuisce del doppio rispetto a due ore in cui sta accesa una lampadina da 25 W.

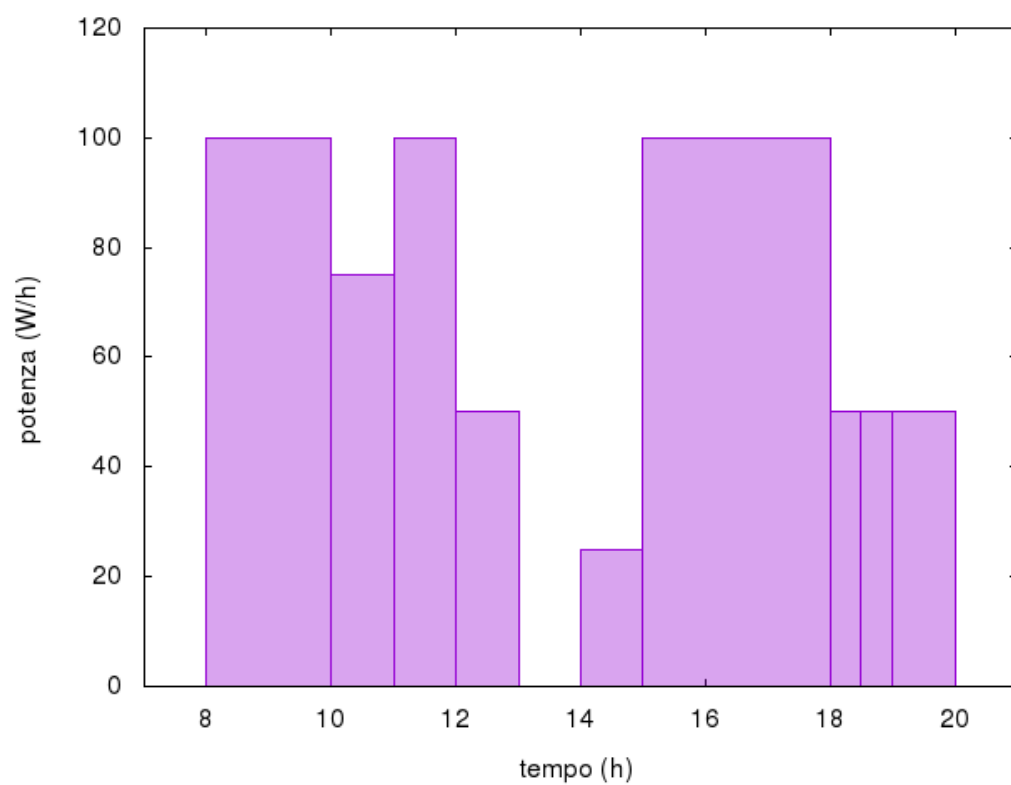


Figura 3: Lo stesso profilo di consumo elettrico mostrato in Figura 2 ma con una *suddivisione* diversa dalla equispaziata usata prima: le fasce orarie 8–10 e 15–18 sono state accorpate mentre la 18–19 è stata ulteriormente divisa a metà.

1. gli assunti impliciti, ovvero le ipotesi che sono state assunte “sotto traccia” nel procedere del discorso;
2. le debolezze del metodo, ossia i casi concreti in cui potrebbe fallire nel rappresentare quantitativamente una situazione reale e le sue possibili generalizzazioni.

Una considerazione del primo tipo riguarda l’assunzione che le funzioni che stiamo integrando siano costanti a tratti, cosicché graficamente si lavora con rettangoli (*i.e.* il lato che non ha estremi sull’asse x è orizzontale) e con la loro formula elementare per l’area. Le situazioni reali raramente sono così semplici: per esempio durante un viaggio in auto si preme e si rilascia l’acceleratore con una pressione variabile del piede, cosicché il numero di giri del motore (e dunque il consumo di carburante) varia in maniera continua.

Anche nel caso semplice in cui la funzione integranda è costante a tratti, riflettere sulla correttezza del procedimento intuitivo finora delineato può aiutare le studentesse e gli studenti nella comprensione di concetti come quello di *suddivisione* o di *area con segno*. Adoperando ancora l’esempio delle lampadine si presentino la Figura 2 unitamente con la Figura 3 e si stimoli la discussione sul motivo per cui le aree complessive (*i.e.* il consumo elettrico) siano uguali. In questa fase è anche possibile che dalla classe emergano congetture sulle operazioni che è possibile fare sulle suddivisioni, e non è raro che tali congetture isolino caratteristiche peculiari delle suddivisioni, come il loro essere una *rete*; l’insegnante contribuisce “guidando” il ragionamento collettivo e sottolineando i passaggi della discussione che individuano tali caratteristiche significative.

Se si procede manipolando concettualmente i problemi contestualizzati in precedenza, aumentando gradualmente il livello di astrazione e generalità, si può introdurre l’idea di area *segnata*. Ad esempio, oltre alle lampadine che vengono accese o spente, la situazione domestica considerata sopra può essere arricchita di un generatore fotovoltaico, che durante il giorno produce energia elettrica della quale si può tener conto considerandola un consumo *negativo*.³

2.2 Seconda fase

Questa fase è pensata per essere svolta nel laboratorio d’informatica, con la classe divisa in gruppi di 2 o 3 persone per ogni postazione. Con l’aiuto di un videoproiettore l’insegnante presenta il problema della integrazione di una funzione continua, e una volta chiariti i termini discorsivi di base e l’obiettivo dell’attività lascia che gli studenti e le studentesse lavorino al progetto di programmazione, restando a disposizione per aiuti e delucidazioni.

Quadratura per rettangoli e per trapezi. Grazie al lavoro di generalizzazione svolto nella prima fase, è possibile ora affrontare l’integrazione di funzioni continue arbitrarie. Si presenti un caso di studio concreto, possibilmente in relazione con quelli presentati nella prima fase, ma in cui la funzione integranda non è costante a tratti ma continua; un possibile esempio relativo al consumo di carburante consiste nel considerare la funzione f che misura il numero di giri del motore oppure la pressione sul pedale dell’acceleratore.

Si chieda dapprima, alla classe come insieme, di congetturare un metodo di quadratura per rettangoli della funzione f sopra un’intervallo $[a, b]$: l’insegnante partecipa alla discussione essenzialmente per isolare e formalizzare le intuizioni significative che emergono dal dibattito, così da rendere fruibile all’intero gruppo un concetto espresso con lo stesso linguaggio. Per esempio la suddivisione equispaziata dell’intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli può essere tradotta in simboli

$$x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad (3)$$

ciò che in laboratorio non è soltanto un esercizio di sintassi matematica, ma il germe della fase creativa in cui *il concetto stesso* di suddivisione equispaziata viene incorporato in un costrutto (ad esempio un ciclo iterativo) del linguaggio di programmazione.

³Si sottolinei anche in questa occasione l’aspetto *relazionale* degli oggetti matematici: il pannello solare fornisce un apporto negativo al consumo di corrente; d’altronde nella versione simmetrica del problema lo si potrebbe pensare come un contributo positivo alla produzione di energia, a cui le lampadine e gli elettrodomestici forniscono un contributo di segno negativo.

Nonostante la scelta di cosa considerare positivo e negativo sia arbitraria e riguardi l’osservatore umano (*e.g.* analogamente alla scelta dell’orientazione), gli oggetti manipolati conservano una sorta di “autonomia” dallo scienziato, nella misura in cui la loro mutua relazione (*i.e.* il segno opposto con cui vanno sommati i contributi) *non* dipende dalla suddetta scelta.

Un altro aspetto riguarda la scelta dei punti su cui calcolare il valore della funzione f , e la consapevolezza che ciò determini l'altezza dell' i -esimo intervallo; una proposta possibile è quella di usare il punto medio dell'intervallo $m_i = (x_i + x_{i+1})/2$, cosicché l'area dell' i -esimo rettangolo è $R_i = m_i \cdot h$.

È importante che durante lo svolgersi della discussione l'insegnante visualizzi in tempo reale l'effetto delle scelte proposte dalla classe sul metodo di quadratura: da una parte ciò permette alle studentesse ed agli studenti di valutare immediatamente la correttezza o sensatezza delle loro congetture, dall'altra il metodo dei rettangoli mostra la sua imprecisione una volta visualizzato (porzioni di area in eccesso o difetto rispetto al sottografico di f) suggerendo immediatamente la generalizzazione al metodo dei trapezi.

Nella quadratura per trapezi si prendono i valori della funzione sopra gli estremi di un intervallo della suddivisione, cosicché l'area dell' i -esimo trapezio è

$$T_i = \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1})) \cdot (x_{i+1} - x_i)}{2} = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot h. \quad (4)$$

A questo punto l'insegnante mostra una animazione del processo-limite sulle suddivisioni progressivamente più fini, per giustificare almeno intuitivamente la correttezza⁴ del procedimento di quadratura per rettangoli/trapezi nel fornire l'area con segno sottesa dal grafico di f . Animazioni esemplificative di questo tipo, prodotte con il software designato per questa attività didattica [3], si possono trovare all'indirizzo <http://poisson.dm.unipi.it/~deleo/math/dmnt/video/>.

Conclusa questa panoramica, si inizia il lavoro di laboratorio vero e proprio, in cui ogni gruppo scrive un algoritmo che presa in input una funzione f , un intervallo di integrazione $[a, b]$ ed il numero n di suddivisioni equispaziate fornisca in uscita il valore numerico e una rappresentazione grafica della approssimazione per rettangoli e per trapezi.

Anche in questa fase l'insegnante resta a disposizione per fornire chiarimenti ed aiutare quei gruppi che incontrano difficoltà. Come già evidenziato nella Sezione 1, la scrittura collaborativa del codice in un certo senso "obbliga" il gruppo a stabilire un linguaggio comune per discutere le idee matematiche, che poi vengono tradotte nel linguaggio di programmazione che ne evidenzia il carattere algoritmico. Per esempio si veda il Codice 1 tratto da [3] che illustra la porzione di programma che calcola l'approssimazione integrale ed elabora i dati per la visualizzazione.

Codice 1: Versione equispaziata del metodo dei rettangoli.

```
function [S,s] = int_rettangoli( x_min, x_max, n, method )
    global _SANITYCHECK; global _VERBOSITY; global f;
    _SANITYCHECK && assert( x_min < x_max, "Intervallo del dominio non valido." );
    _SANITYCHECK && assert( not (method == "R2") || n>0, "L'ampiezza deve \
essere positiva." );

    [...] # blocco del caso method == "R1"

    S = [];
    s = 0;
    h = ( x_max - x_min )/n;
    X = linspace( x_min, x_max, n+1 );
    for i = 1:n
        m = ( X(i) + X(i+1) ) / 2;
        y = f(m);
        S( end+1, : ) = [ m, y, h, y*h ];
        s = s + h*y;
    endfor

    [...]
```

⁴cfr. con le considerazioni fatte nella Sezione 1.

Una volta che un gruppo è riuscito a tradurre nel linguaggio di programmazione un procedimento formale, l'insegnante può suggerire di aggiungere funzionalità al codice che trasmettano con immediatezza visiva altre caratteristiche, come ad esempio il segno positivo o negativo del contributo del singolo intervallino; la porzione di Codice 2 tratta da [3] è stata usata per produrre la Figura 4.

Codice 2: Plot del metodo dei rettangoli con colorazione selettiva.

```
# filtri: positivo, negativo
fltP(x,sgn) = ( sgn > 0 ) ? x : 1/0
fltN(x,sgn) = ( sgn < 0 ) ? x : 1/0

# rettangoli colorati a seconda d. contributo pos./neg. e sopra la funzione
plot 'dati/rettangoli.dat' using (fltP($1,$2)):2:3 with boxes lc rgb '#0AFF06', \
'dati/rettangoli.dat' using (fltN($1,$2)):2:3 with boxes lc rgb '#FF0A06', \
'dati/valori_f.dat' with lines
```

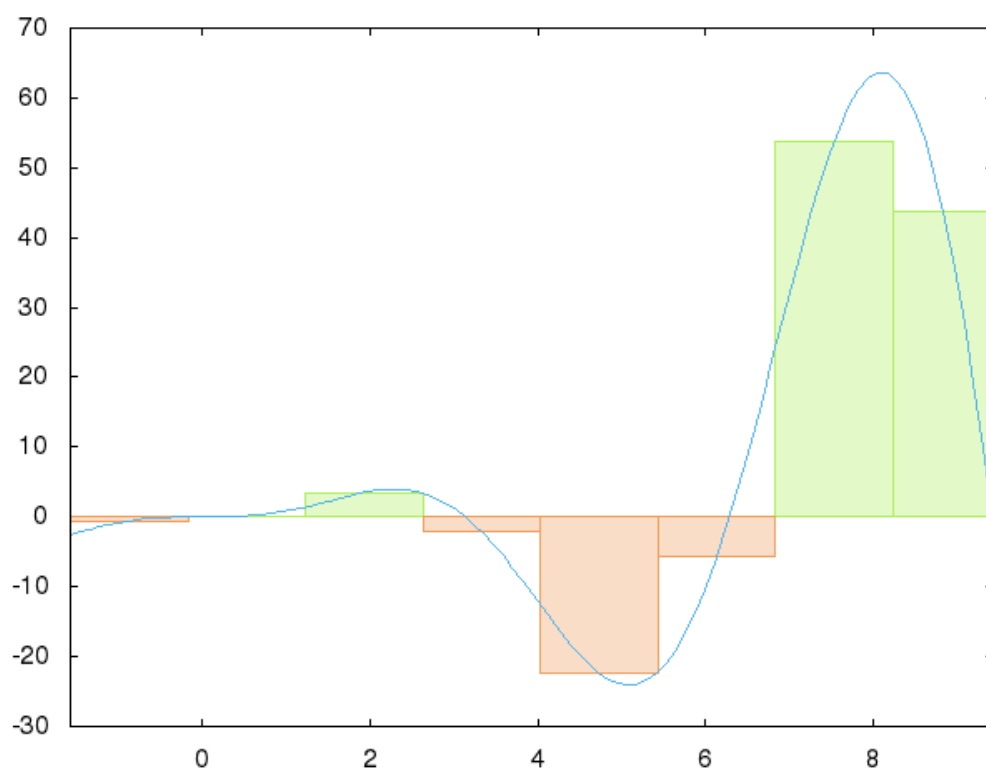


Figura 4: Illustrazione del metodo dei rettangoli su una suddivisione non equispaziata ma con ampiezza data (method='R2'). Il contributo positivo o negativo di ogni intervallo è evidenziato dal colore del rettangolo; la funzione è $f(x) = x^2 \sin(x)$ sull'intervallo $[-\pi/2, 3\pi]$.

2.3 Terza fase – possibili approfondimenti

Un possibile ampliamento dell'attività consiste in due approfondimenti per dare continuità con lo sviluppo successivo della teoria che verrà svolto in classe.

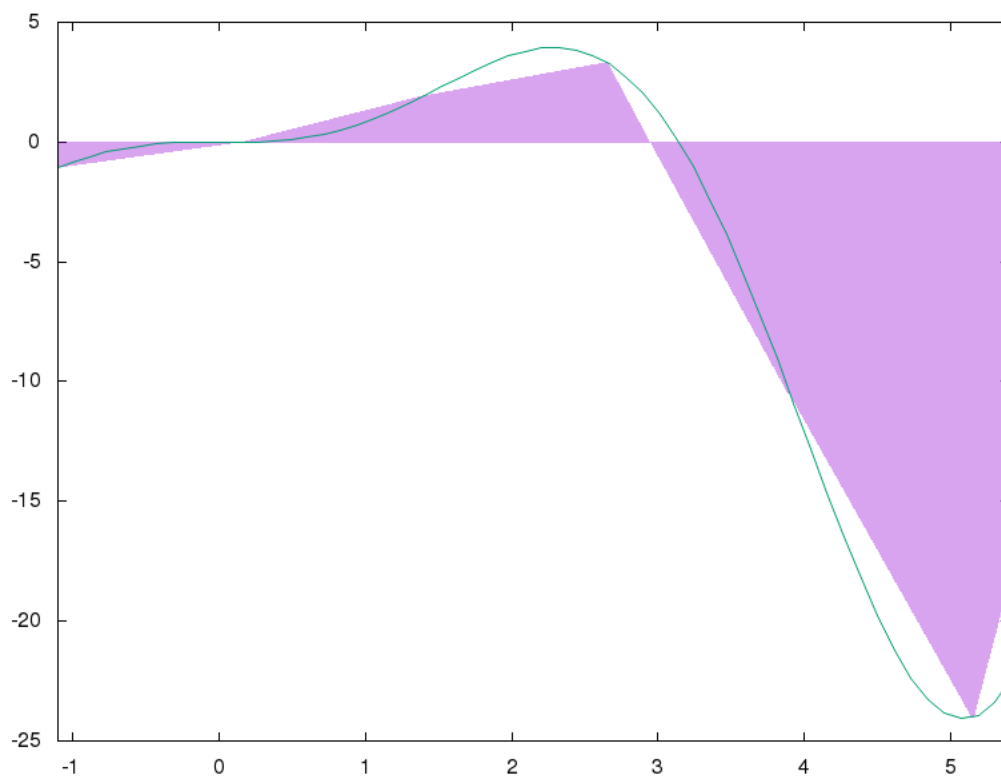


Figura 5: Illustrazione del metodo dei trapezi su una suddivisione equispaziata (method='T1'). La figura permette di apprezzare un aspetto che non è immediato a prima vista, ossia quello dei possibili trapezi “anomali” che hanno due ordinate di segno opposto; si noti che la formula per l’area (segnata) vale anche in questo caso.

Il primo compito, nello stesso spirito dell'attività svolta finora, consiste nel confrontare la velocità di convergenza dei metodi di quadratura per rettangoli e per trapezi. Si chiede ai gruppi di aggiungere al codice una funzione che confronti i due metodi, ovviamente utilizzando le funzioni e procedure già definite ed utilizzando i metodi *built-in* per la quadratura numerica. L'accento viene ancora posto sulla visualizzazione del risultato: si veda come esempio la Figura 6, ottenuta tramite la suite [3], precisamente con la funzione riportata nel Codice 3.

Codice 3: Confronto della velocità di convergenza tra il metodo dei rettangoli e dei trapezi.

```
function C = confrontaRT( x_min, x_max, nmax )
    global _SANITYCHECK; global f;
    _SANITYCHECK && assert( x_min < x_max, "Intervallo del dominio non valido." );

    C = [];
    numeric = quad( f, x_min, x_max ); # integrale definito
    for i=1:nmax
        [R,r] = int_rettangoli( x_min, x_max, i, 'R1' );
        [T,t] = int_trapezi( x_min, x_max, i, 'T1' );
        C( end+1, : ) = [ i, abs( r - numeric ) / abs( numeric ), \
            abs( t - numeric ) / abs( numeric ) ];
    endfor
    save( '-ascii', 'dati/confronto.dat', 'C' );
endfunction
```

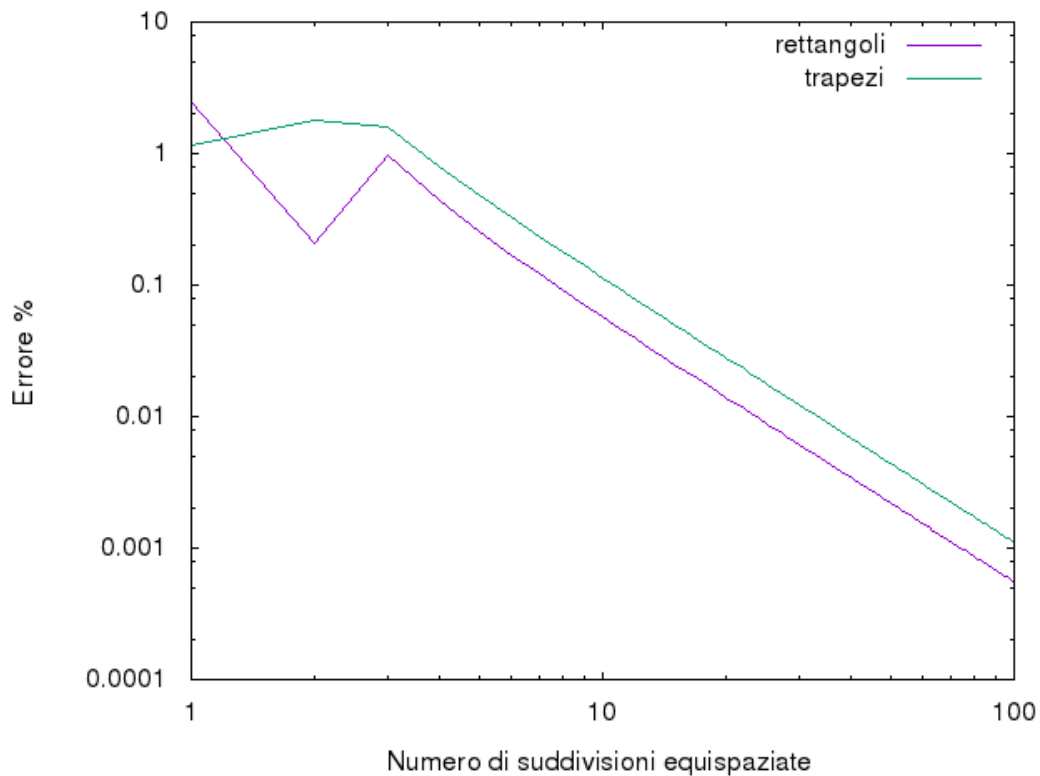


Figura 6: Illustrazione del confronto tra la velocità di convergenza del metodo di quadratura per rettangoli e per trapezi.

Basandosi su di un esito del tipo illustrato in Figura 6 le studentesse e gli studenti potrebbero giungere alla congettura (falsa) che dà il metodo dei rettangoli superiore in efficienza al metodo dei trapezi; oppure una tale questione potrebbe sorgere spontaneamente dal gruppo o essere stimolata dall'insegnante. Si inviti la classe a riflettere sui vari scenari che potrebbero darsi e soprattutto a indagarli sperimentalmente.

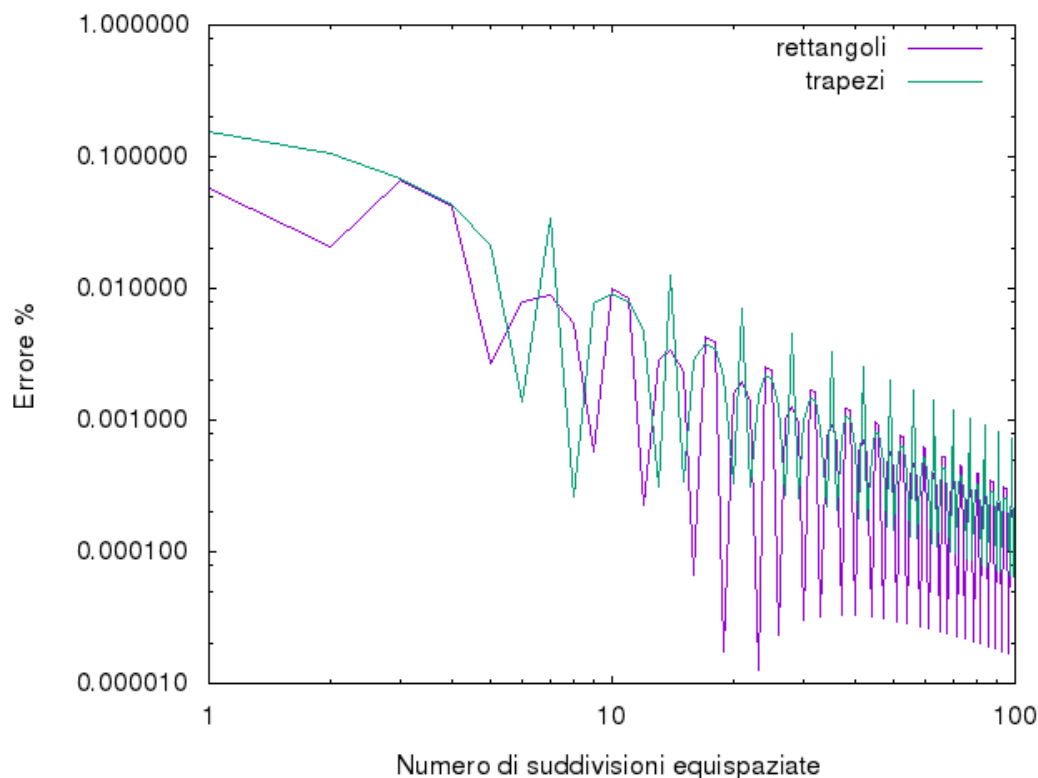


Figura 7: La conclusione (errata) che potrebbe essere suggerita dalla Figura 6 viene confutata sperimentando con una funzione diversa, in questo caso $f(x) = \sqrt{|x|}$, sullo stesso intervallo: in generale il metodo dei rettangoli non è più efficiente del metodo dei trapezi, e viceversa.

Un'ultimo approfondimento, in vista dell'esposizione in classe del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrabile, è la seguente giustificazione intuitiva via metodo grafico dell'enunciato del Teorema.

Nell'attività di laboratorio si è formalizzata nel linguaggio di programmazione una funzione A che calcola l'area con segno sottesa dal grafico di f e che prende in ingresso quattro argomenti: la funzione integranda f , gli estremi a e b dell'intervallo d'integrazione, ed il numero n di suddivisioni equispaziate. Il primo argomento lo si può assumere implicitamente, mentre l'ultimo si può fissare con una dichiarazione statica ad un valore sufficientemente alto per la precisione richiesta o considerare come parametro. In ogni caso, dopo aver scritto il codice gli studenti e le studentesse non avranno difficoltà a riconoscere che le procedure algoritmiche che hanno scritto possono essere ridotte dall'avere funzionalità $A(f, a, b, n)$ alla più semplice $A = A(a, b)$.

Si propone allora di ridurre ulteriormente la funzionalità ad un solo argomento, introducendo l'area con segno della funzione f sull'intervallo $]-\infty, x]$ indicandola con $F(x)$, cosicché è immediato riconoscere (anche graficamente) che $A(a, b) = F(b) - F(a)$.

Prendendo in esame il metodo dei trapezi, è già possibile vedere che al diminuire dell'ampiezza h dell'intervallo $[x_0, x_1 = x_0 + h]$ il lato obliquo del trapezio tende alla posizione limite della tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. Uno sviluppo di Taylor–Mac Laurin al primo ordine in x_0 mostra che

$$A(x_0, x_1) = F(x_1) - F(x_0) = F(x_0) + F'(x_0) \cdot h + o(h) - F(x_0) \simeq F'(x_0) \cdot h, \quad (5)$$

ma la quantità a membro sinistro è l'area del rettangolo con base h ed altezza $f(\tilde{x})$ dove $\tilde{x} \in [x_0, x_1]$; se ne “deduce” (tramite la formula elementare) che nel limite per $h \rightarrow 0$ il primo fattore del membro destro deve essere $F'(x_0) = f(x_0)$.

Riferimenti bibliografici

- [1] Associazione Docenti Italiani. *Istituto Tecnico I e II biennio e V anno – asse matematico*. 2008. URL: <http://ospitiweb.indire.it/adi/Dopo85anni/doc/aggiunti/4.%20ASSE%20MATEMATICO%20IST.TECNICI.pdf>.
- [2] James Callahan et al. *Calculus in Context*. Five College Consortium. URL: <http://www.math.smith.edu/Local/cicintro/cicintro.html>.
- [3] Martino De Leo. *Una suite didattica Open-Source per il calcolo numerico, la visualizzazione e l'animazione del metodo di quadratura à la Riemann*. URL: <http://poisson.phc.unipi.it/~deleo/math/dmnt/integra.tar.gz>.
- [4] John Dewey. *Democrazia e educazione*. Sansoni, 2004.
- [5] Ed Dubinsky e David Tall. *Advanced Mathematical Thinking and the Computer*. A cura di David Tall. Vol. 11. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [6] Max Horkheimer. *Eclisse della ragione. Critica della ragione strumentale*. Torino: Einaudi, 1969.
- [7] Raffaele Mantegazza. *I buchi neri dell'educazione – Storia, politica, teoria*. didascabili. elèuthera, 2006.
- [8] MIUR. *Profili dei Nuovi Istituti Tecnici – Allegato A: Profilo educativo, culturale e professionale dello studente a conclusione del secondo ciclo del sistema educativo di istruzione e formazione per gli Istituti Tecnici*. 2010. URL: http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/doc/allegato_A_tecnici_04_02_2010.pdf.
- [9] Marcello Pedone, Silvano Rossetto e Sergio Zoccante. *Complessi ma semplici*. 2013. URL: http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/complessi-ma-semplfici/.
- [10] Massimo Recalcati. *L'ora di lezione. Per un'erotica dell'insegnamento*. Einaudi, 2014.
- [11] Richard J. Trudeau. *The Non-Euclidean Revolution*. Birkhäuser, 1987.