

Un confronto di alcune matrici companion (Laboratorio Computazionale - proff. D. Bini e B. Meini)

Martino De Leo - 439650 - deleo@mail.dm.unipi.it

1 Introduzione

Uno dei problemi più rilevanti per l'Algebra Lineare Numerica consiste nel trovare una procedura effettiva (*i.e.* un algoritmo) per calcolare gli zeri di un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$; un tale metodo è giocoforza un procedimento iterativo, dal momento che è stato dimostrato che non possono esistere metodi diretti per ogni grado $n \geq 5$.

Un approccio standard consiste nell'associare al polinomio una matrice M_p , funzione continua di p (*i.e.* dei suoi coefficienti) che abbia come autovalori le radici di p , con la stessa molteplicità. Stiamo cioè chiedendo che l'associazione $\Gamma : \mathbb{C}[x]_n \ni p \mapsto M_p \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sia tale che $p_{M_p} = \pm p$, dove $p_A(x) = \det(A - xI)$ è il polinomio caratteristico della matrice A ; una M_p con questa proprietà si dice *matrice companion* di p .

In questo lavoro ci proponiamo di studiare la qualità di quattro diverse forme companion, ossia di associazioni Γ , in base alla "facilità" e precisione con cui permettono di calcolare gli zeri del polinomio. Queste caratteristiche sono catturate dal *numero di condizionamento individuale* di un autovalore $\lambda \in \text{sp}(M_p) = Z(p)$, fornendo un limite superiore all'errore dell'autovalore calcolato, come illustrato dal seguente

Teorema 1. *Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice esatta e $A + F$ la matrice perturbata in macchina. Sia $\lambda \in \text{sp}(A)$ un autovalore esatto semplice e $\eta \in \text{sp}(A + F)$ il corrispondente autovalore calcolato. Siano infine $x, y \in \mathbb{C}^n$ λ -autovettori destro e sinistro per A , di norma unitaria.*

Allora

$$|\lambda - \eta| \leq \frac{1}{y^H x} \|F\|. \quad (1)$$

Sia definito dunque per $\lambda \in \text{sp}(A)$ autovalore semplice, il suo numero di condizionamento individuale $\kappa(\lambda) = 1/y^H x$.

Per un polinomio, abbiamo costruito quattro diverse matrici companion e confrontato i numeri di condizionamento individuali degli autovalori corrispondenti.

È stato anche condotto un controllo sulla correttezza del procedimento, ossia per una companion $M_p = \Gamma(p)$ si è controllato che i suoi autovalori concordassero con gli zeri di p e che i coefficienti del polinomio caratteristico p_{M_p} concordassero coi coefficienti di p (per lo meno approssimativamente).

Ci si è ristretti senza perdita di generalità al caso monico, dacché se $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$ allora il polinomio $\hat{p}(x) = x^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} x^{n-1} + \dots + \frac{p_1}{p_n} x + \frac{p_0}{p_n} = \frac{1}{p_n} p(x)$ ha le stesse radici di p (con molteplicità) ed è monico.

1.1 Le matrici esaminate

Per tutte le seguenti associazioni $\Gamma : p \mapsto M_p$, verificare che M_p è davvero una matrice companion per p è facile quanto sviluppare il determinante $\det(M_p - xI) = p_{M_p}(x)$. Poniamo

$$\mathbb{C}[x] \ni p(x) = x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0. \quad (2)$$

Tutte le matrici companion esclusa la Frobenius sono funzione di p e anche di una tupla di punti (x_1, \dots, x_n) dove $n = \deg p$. Si è studiata anche la dipendenza del numero di condizionamento individuale delle radici dalla scelta di questi punti.

1.1.1 Frobenius

$$\Gamma(p) = F_p = \begin{pmatrix} -p_{n-1} & -p_{n-1} & \cdots & -p_0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

ma sono possibili altre forme equivalenti come F_p^T , oppure mettendo gli opposti dei coefficienti di p sull'ultima colonna anziché sulla prima riga.

Nel corso della sperimentazione, si è usata la funzione nativa di Octave `compan()` per generare le matrici companion di Frobenius.

1.1.2 Arrowhead

Questa matrice è funzione di p e di $n + 1$ nodi di interpolazione x_1, \dots, x_{n+1} . Si ponga

- $s_i = p(x_i)$ per $i = 1, \dots, n + 1$
- $Q_k(x) = \prod_{j=1}^k (x - x_j)$ per $k = n, n + 1$
- $t_i = -(Q'_{n-1}(x_i))^{-1}$ per $i = 1, \dots, n - 1$
- $t_n = \sum_{i=1}^{n+1} (x_{n+1} + x_n - x_i) s_i Q'_{n+1}(x_i)^{-1}$
- $u = \sum_{i=1}^{n+1} x_i Q'_{n+1}(x_i)^{-1}$

dopo di che si ottiene

$$\Gamma(p) = A_p = \begin{pmatrix} x_1 & & & t_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & x_{n-1} & t_{n-1} \\ s_1/u & \dots & s_{n-1}/u & t_n/u \end{pmatrix}. \quad (4)$$

1.1.3 Smith

$$\Gamma(p) = S_p = \text{diag}(x_1, \dots, x_n) - ew^T, \quad e = (1, \dots, 1)^T, \quad w = (w_i)_{i=1}^n, \quad w_i = \frac{p(x_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)}. \quad (5)$$

1.1.4 Colleague

Sia $\{\varphi_i(x) = \prod_{j=1}^i (x - x_j)\}_{i=0}^n$ la base di Newton per $C[x]_{\leq n}$; questa matrice companion necessita dei coefficienti a_i di p espresso in questa base:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x), \quad (6)$$

e si osservi che $p_n = 1 \iff a_n = 1$.

$$\Gamma(p) = C_p = \begin{pmatrix} x_1 & & & -a_0 \\ 1 & x_2 & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_{n-1} & -a_{n-2} \\ & & & 1 & x_n - a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

1.2 Bilanciamento

Per ogni matrice companion si è studiato anche il modo in cui il *bilanciamento* influisce sui numeri di condizionamento degli autovalori. Si sono considerati due tipi diversi di bilanciamento:

- il bilanciamento nativo di Octave tramite la funzione `balance()`, che dalla matrice A in input produce $B = SAS^{-1}$ cercando di ottenere tutte le righe e le colonne di B della stessa norma. Normalmente $S = PD$ dove $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ e P è una matrice di permutazione; nel nostro esperimento si è imposto $P = I$ in modo da non permutare le righe e colonne di A (parametro `noperm`). Questo metodo di bilanciamento è riferito nel seguito con `balance`.
- $B = DAD^{-1}$ un coniugio diagonale in modo da avere gli elementi simmetrici sulla prima riga e la prima colonna di B uguali in modulo. Questo bilanciamento è applicabile solo alle companion di Smith e Arrowhead.

Nel primo caso si ottiene $d_1 = 1, d_i = \sqrt{|w_i|}, i = 2, \dots, n$.

Per la Arrowhead invece si è reso uguali in modulo gli elementi corrispondenti della prima colonna e dell'ultima riga, ottenendo $d_n = 1, d_i = \sqrt{|s_i|/|ut_i|}, i = 1, \dots, n - 1$.

Ci riferiamo nel seguito a questo secondo tipo di bilanciamento come “scal.” (da scalatura).

2 Sperimentazione

Si è prodotto un unico script per Octave, organizzato per sezioni, chiamato `generalized_companions.m`.

Tutti gli oggetti ivi definiti sono caricabili dopo aver lanciato Octave nella stessa directory con il comando `source generalized_companions.m`.

Il codice è autodocumentato, e si può accedere a tale documentazione anche in linea dal prompt di octave, come illustrato nel codice 1.

Codice 1: caricamento del modulo e aiuto in linea per una funzione ivi definita

```
octave:1> source generalized_companions.m
2 octave:2> help baricircolo
'baricircolo' is a command-line function
4
5 Prende un array di punti e ritorna [c,r] baricentro e raggio
6 minimo che include tutti
```

Nella nostra sperimentazione un polinomio viene passato come lista dei suoi coefficienti nella base monomiale e vengono testate le companion di Frobenius, Arrowhead e di Smith; dopo di che per testare la Colleague si calcolano i coefficienti nella base di Newton con la funzione `cambiobase_monomialeNewton()`.

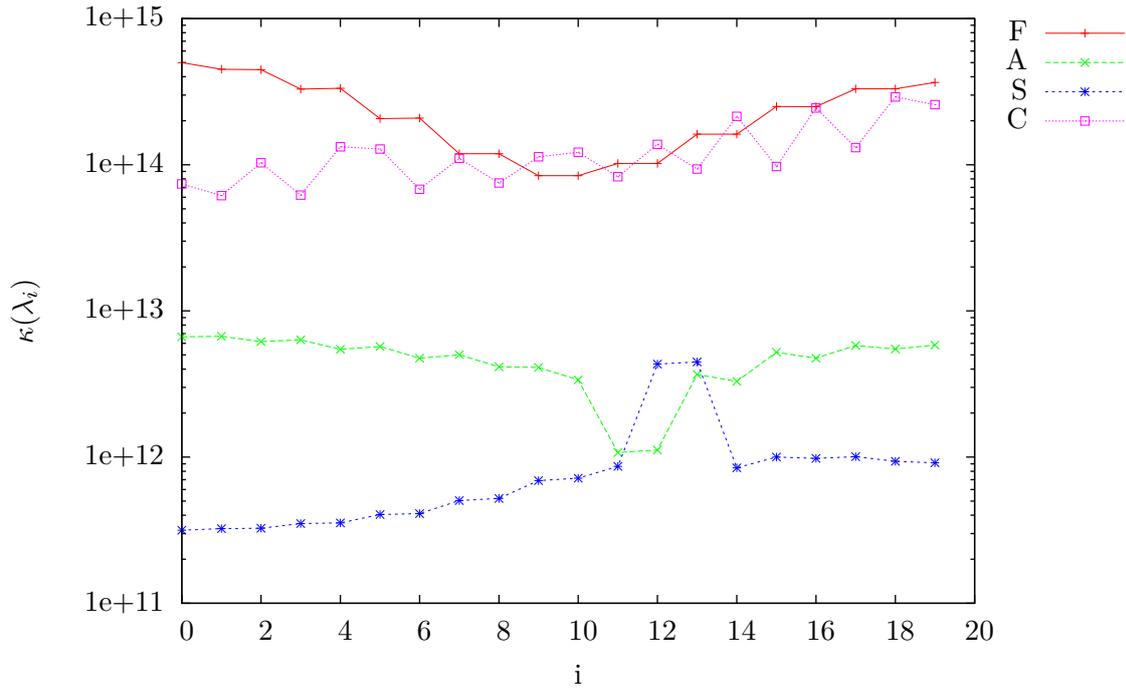
Tutte le suite di test (confronto dei numeri di condizionamento individuali con e senza bilanciamento, verifica della correttezza sui coefficienti del polinomio caratteristico e sugli autovalori calcolati) producono un file con estensione `.dat` in cui è riportato un autovalore per riga. Gli altri script `filehelper.py` e `grafici_condiz.gp` sono rispettivamente un traduttore nel formato $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ e un generatore di grafici che elaborano i file `.dat` prodotti con Octave.

2.1 Senza bilanciamento

2.1.1 Primo test

Si è usato il polinomio $p(x) = (x + 1)^{20}$, che è molto mal condizionato perché ha -1 come unica radice di molteplicità elevata. Si sono confrontate le quattro matrici companion di Frobenius, Arrowhead, di Smith e Colleague senza bilanciamenti. I punti x_i sono stati scelti equispaziati su una circonferenza di centro l'origine e raggio sufficiente a contenere tutti gli zeri; per ottenere questa stima direttamente dai coefficienti del polinomio si è usata la funzione `stima_modulo` che utilizza il teorema di Hirsch sulla matrice companion di Frobenius con le norme 1- e infinito.

Condizionamento degli autovalori

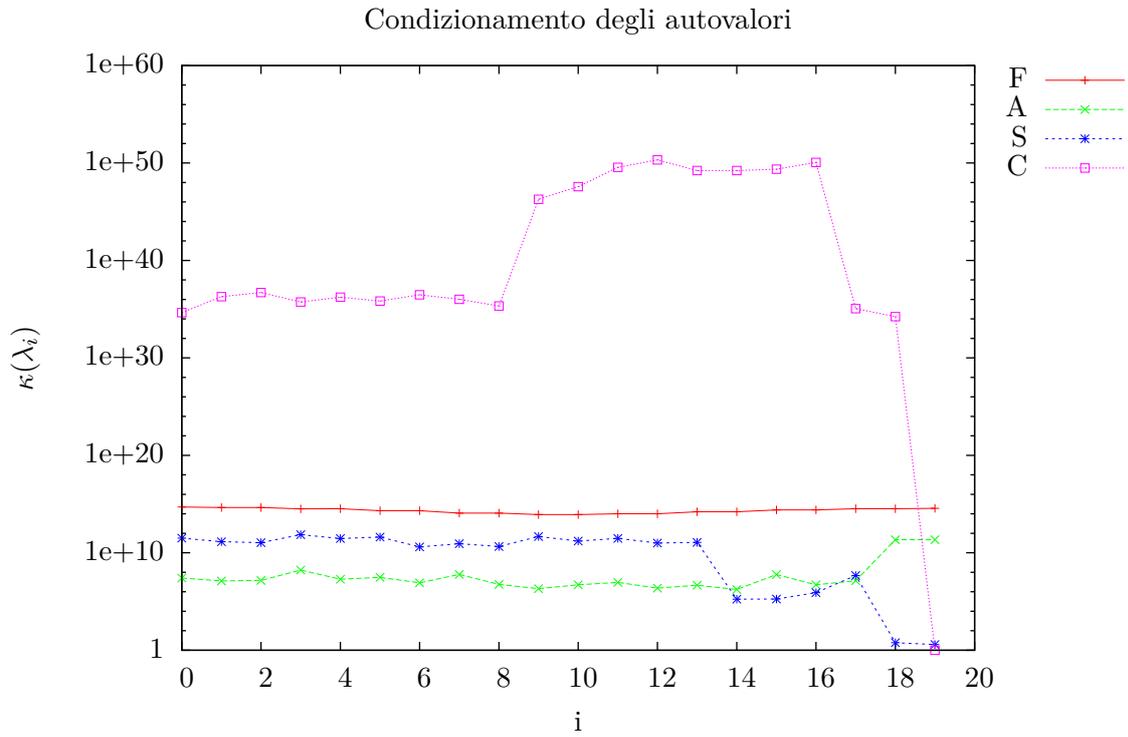


A titolo esemplificativo, segue una tabella con gli autovalori effettivamente calcolati sulle varie linearizzazioni (l'autovalore esatto è -1).

	Frobenius	Arrowhead	Smith	Colleague
λ_1	-0.722512	$-0.53449 - 0.0035738i$	$-0.58531 - 0.021633i$	$-0.50838 + 0.00077627i$
λ_2	$-0.73059 + 0.073606i$	$-0.55806 + 0.14189i$	$-0.60067 + 0.11148i$	$-0.51673 + 0.15452i$
λ_3	$-0.73059 - 0.073606i$	$-0.55868 - 0.1497i$	$-0.61464 - 0.15219i$	$-0.54427 - 0.13848i$
λ_4	$-0.75524 + 0.14546i$	$-0.62575 + 0.27139i$	$-0.65851 + 0.23122i$	$-0.57613 + 0.30647i$
λ_5	$-0.75524 - 0.14546i$	$-0.62841 - 0.28035i$	$-0.68437 - 0.26496i$	$-0.60968 - 0.25305i$
λ_6	$-0.79766 + 0.21326i$	$-0.72945 + 0.37241i$	$-0.75062 + 0.32436i$	$-0.69345 - 0.34928i$
λ_7	$-0.79766 - 0.21326i$	$-0.73559 - 0.38141i$	$-0.78521 - 0.34811i$	$-0.68751 + 0.43787i$
λ_8	$-0.85999 + 0.27329i$	$-0.85829 + 0.43581i$	$-0.86526 + 0.38231i$	$-0.80362 - 0.42669i$
λ_9	$-0.85999 - 0.27329i$	$-0.86824 - 0.44281i$	$-0.90496 - 0.39413i$	$-0.84416 + 0.52806i$
λ_{10}	$-0.94419 + 0.31851i$	$-0.9974 + 0.45376i$	$-0.98831 + 0.40145i$	$-0.93589 - 0.46813i$
λ_{11}	$-0.94419 - 0.31851i$	$-1.0092 - 0.45631i$	$-1.028 - 0.40182i$	$-1.0705 - 0.47148i$
λ_{12}	$-1.0487 + 0.33815i$	$-1.1866 - 0.17887i$	$-1.1087 + 0.39244i$	$-1.0292 + 0.55827i$
λ_{13}	$-1.0487 - 0.33815i$	$-1.1866 + 0.17887i$	$-1.1862 - 0.17885i$	$-1.2099 - 0.44356i$
λ_{14}	$-1.1656 + 0.32005i$	$-1.1213 + 0.4477i$	$-1.1866 + 0.17917i$	$-1.214 + 0.51807i$
λ_{15}	$-1.1656 - 0.32005i$	$-1.1339 - 0.45103i$	$-1.1528 - 0.38664i$	$-1.3358 - 0.37079i$
λ_{16}	$-1.2781 + 0.25476i$	$-1.2951 + 0.42993i$	$-1.2514 + 0.3533i$	$-1.3706 + 0.42397i$
λ_{17}	$-1.2781 - 0.25476i$	$-1.3175 - 0.42678i$	$-1.3065 - 0.32589i$	$-1.4601 - 0.27081i$
λ_{18}	$-1.362 + 0.14252i$	$-1.5067 + 0.29562i$	$-1.405 + 0.23732i$	$-1.5015 + 0.27437i$
λ_{19}	$-1.362 - 0.14252i$	$-1.5285 - 0.27381i$	$-1.4471 - 0.17744i$	$-1.5423 - 0.092232i$
λ_{20}	-1.39337	$-1.6204 + 0.017244i$	$-1.4897 + 0.038618i$	$-1.5463 + 0.082121i$

2.1.2 Secondo test

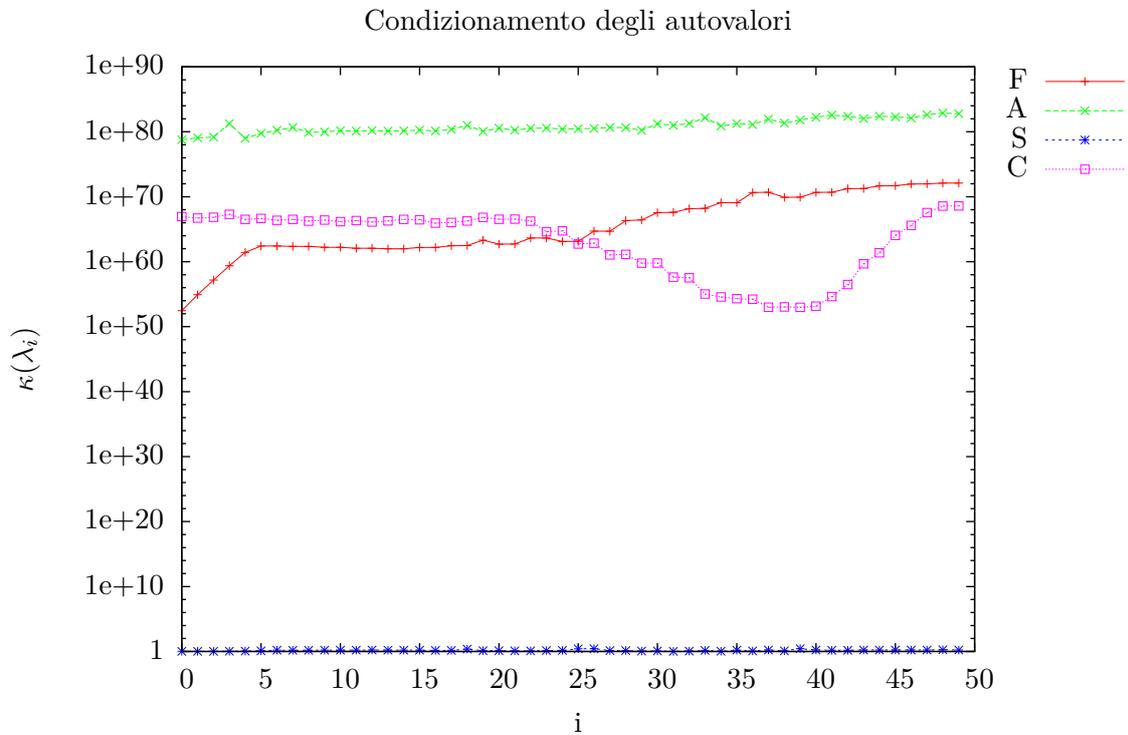
Il polinomio è ancora $p(x) = (x + 1)^{20}$, ma le approssimazioni iniziali sono state scelte perturbando la radice esatta con un numero complesso pseudocasuale di modulo 10^{-4} .



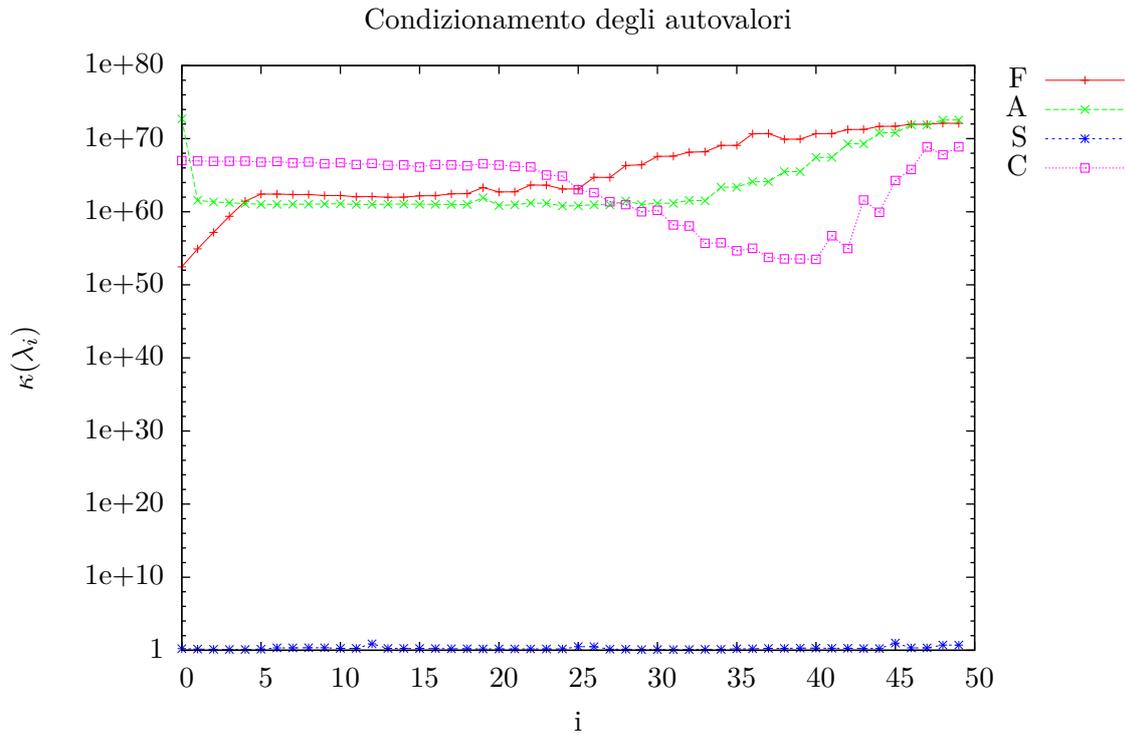
Rispetto al primo test le prestazioni di tutte le linearizzazioni sono confrontabili, tranne che per la Colleague.

2.1.3 Terzo test

Si è usato il polinomio di Wilkinson $p(x) = \prod_{i=1}^n (x - i) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdots (x - n)$ con $n = 50$. I nodi x_i sono stati scelti in corrispondenza delle radici (semplici) perturbandole con un numero complesso casuale di modulo 0.05.

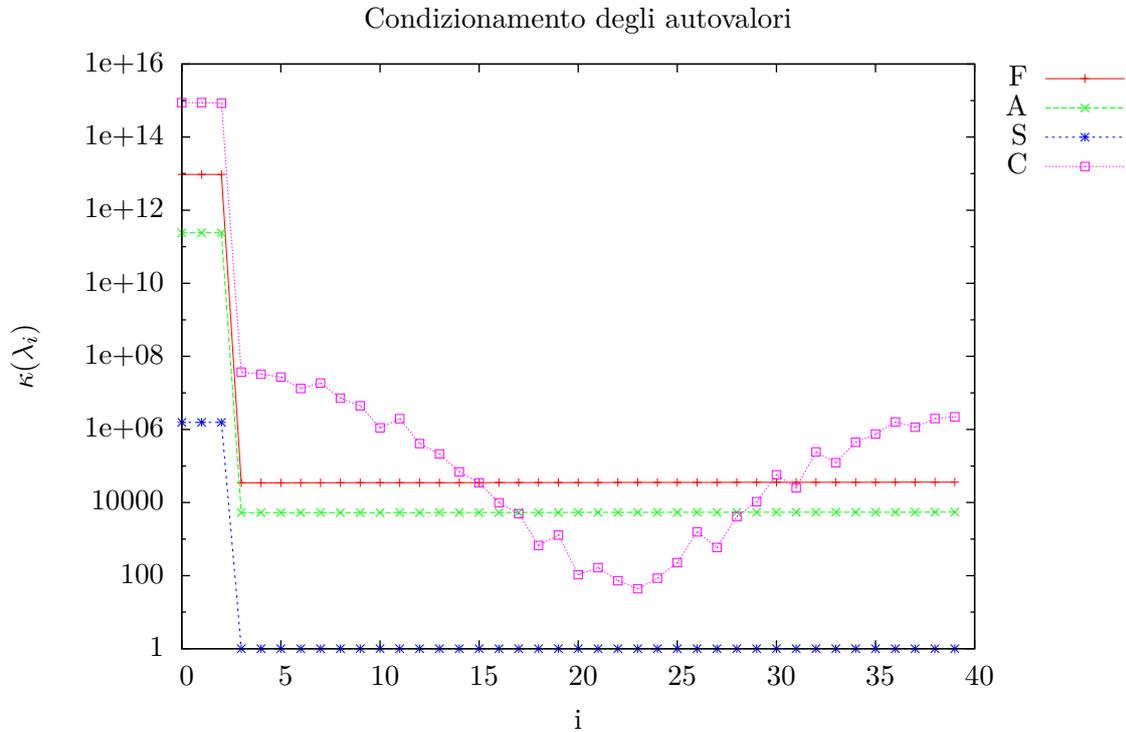


Sempre con grado $n = 50$, ma scegliendo i nodi x_i traslando verso destra le radici esatte: $x_i = \zeta_i + 0.4 = i + 0.4$ si ottiene il seguente grafico.



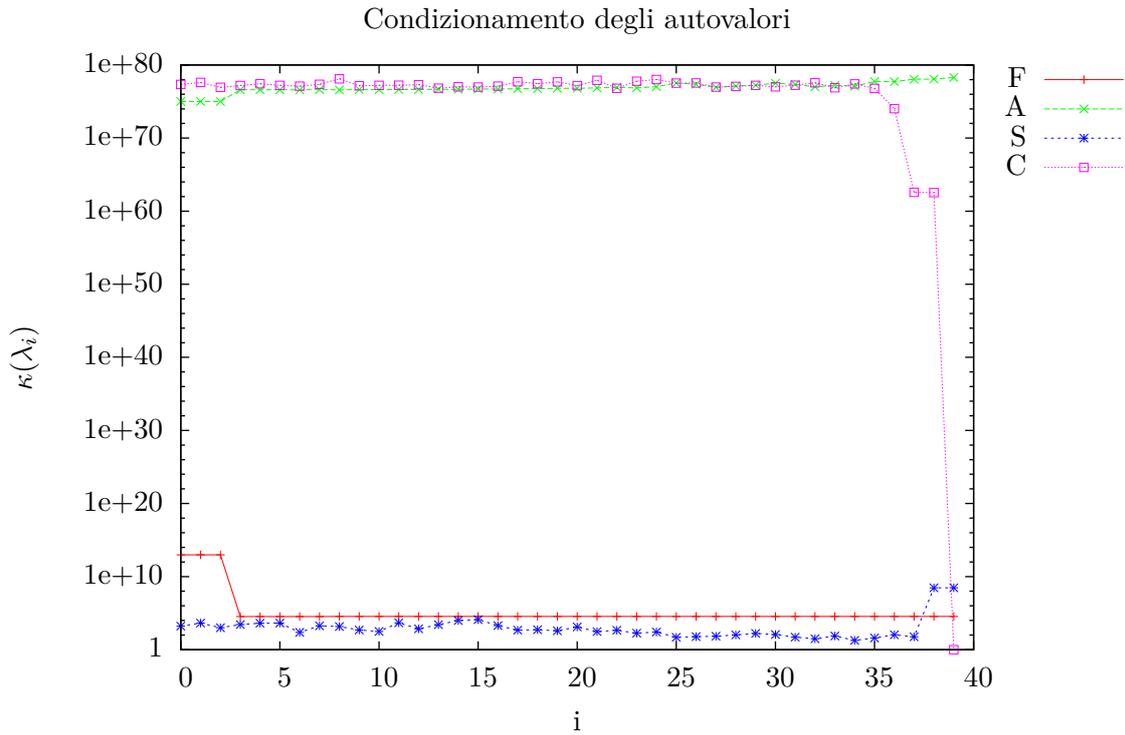
2.1.4 Quarto test

I polinomi di tipo Mignotte $p(x) = x^n + (100x + 1)^3$ hanno -10^{-2} come radice tripla mentre le altre sono molto più grandi in modulo se n è abbastanza grande. Si è scelto $n = 40$, gli x_1, x_2, x_3 sulla circonferenza di raggio ε centrata in $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = -\frac{1}{100}$, e gli altri nodi x_i perturbando le radici esatte ζ_i con un numero complesso di modulo ε per $i = 4, \dots, 40$. In questo test $\varepsilon = 10^{-4}$. Nel grafico che segue si può notare la sostanziale differenza, per tutte le companion testate, tra il condizionamento degli autovalori nel cluster intorno a $-\frac{1}{100}$ e gli altri.



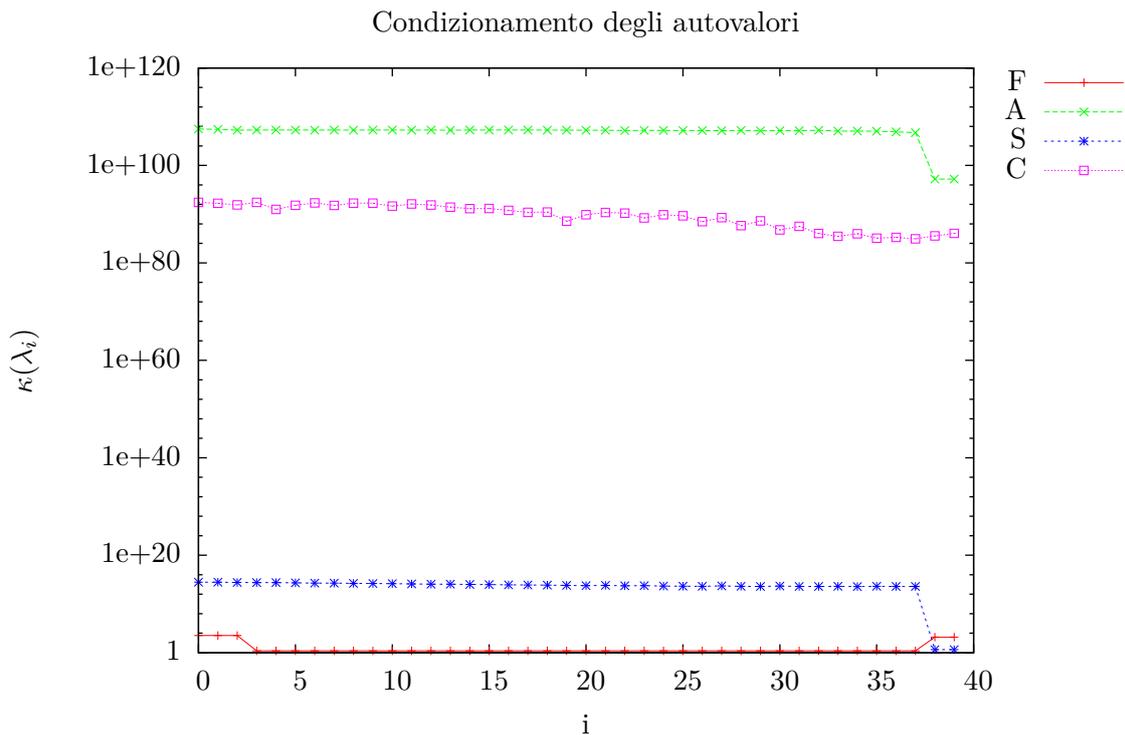
Con lo stesso polinomio, la scelta degli x_i equispaziati su una circonferenza centrata in 0 e di raggio sufficiente a contenere tutti gli zeri, si ottiene il grafico seguente; si può osservare un sostanziale decadimento nelle

prestazioni della Arrowhead e della Colleague, e mentre è naturale aspettarsi che la Frobenius resti inalterata (non dipende dagli x_i), la Smith mantiene dei numeri di condizionamento relativamente bassi, dell'ordine compreso tra le decine e le migliaia.

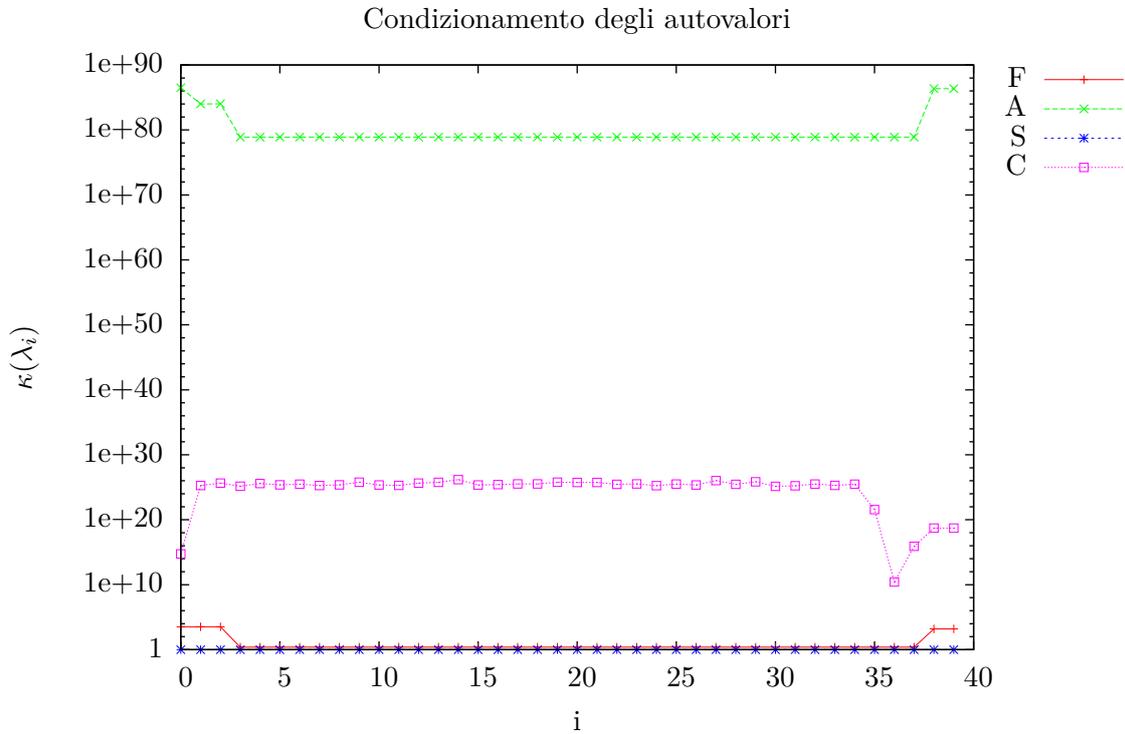


2.1.5 Quinto test

Si è usato il polinomio $p(x) = x^n + 10^5 x^{n-2} + 10^6 x^3 + 1$, scegliendo gli x_i nel seguente modo: sia $m = \max_{\zeta \in Z(p)} |\zeta|$ il massimo modulo di una radice; si sono scelte tre circonferenze centrate in 0 con raggio rispettivamente $r_1 = m/3, r_2 = 2m/3, r_3 = m$ e gli x_i equispaziati su ognuna di esse, in numero pari al numero di zeri di p che hanno modulo minore o uguale al raggio della circonferenza. Per $n = 40$ si ottiene il seguente grafico.

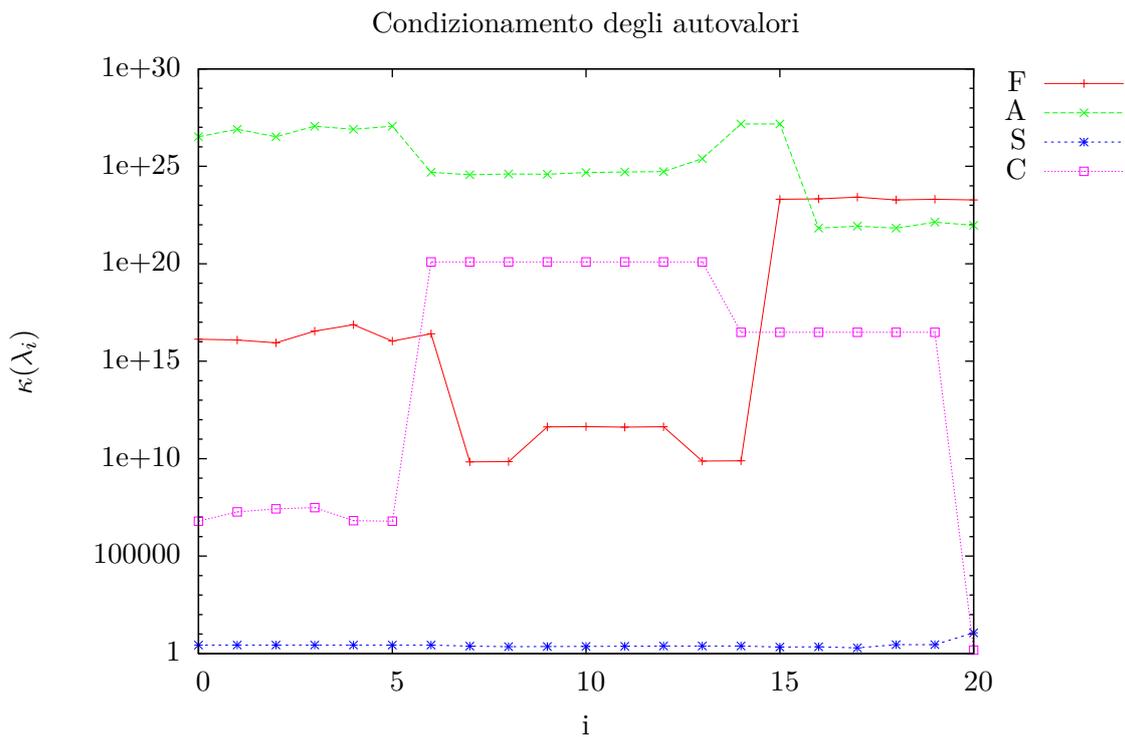


In aritmetica esatta, questo polinomio ha due zeri immaginari puri di modulo molto grande rispetto agli altri zeri ($\zeta_{40} = -\zeta_{39} = 316i$, mentre gli altri zeri hanno modulo 1 o inferiore). Si sono scelti stavolta gli x_i per $i = 1, \dots, 38$ equispaziati su una circonferenza di raggio $|\zeta_{38}| + \varepsilon$, e gli ultimi due perturbando le radici immaginarie di modulo grande con un numero complesso pseudocasuale di modulo $\varepsilon = 10^{-3}$, ottenendo il seguente grafico (si notino i numeri di condizionamento degli autovalori di modulo massimo).

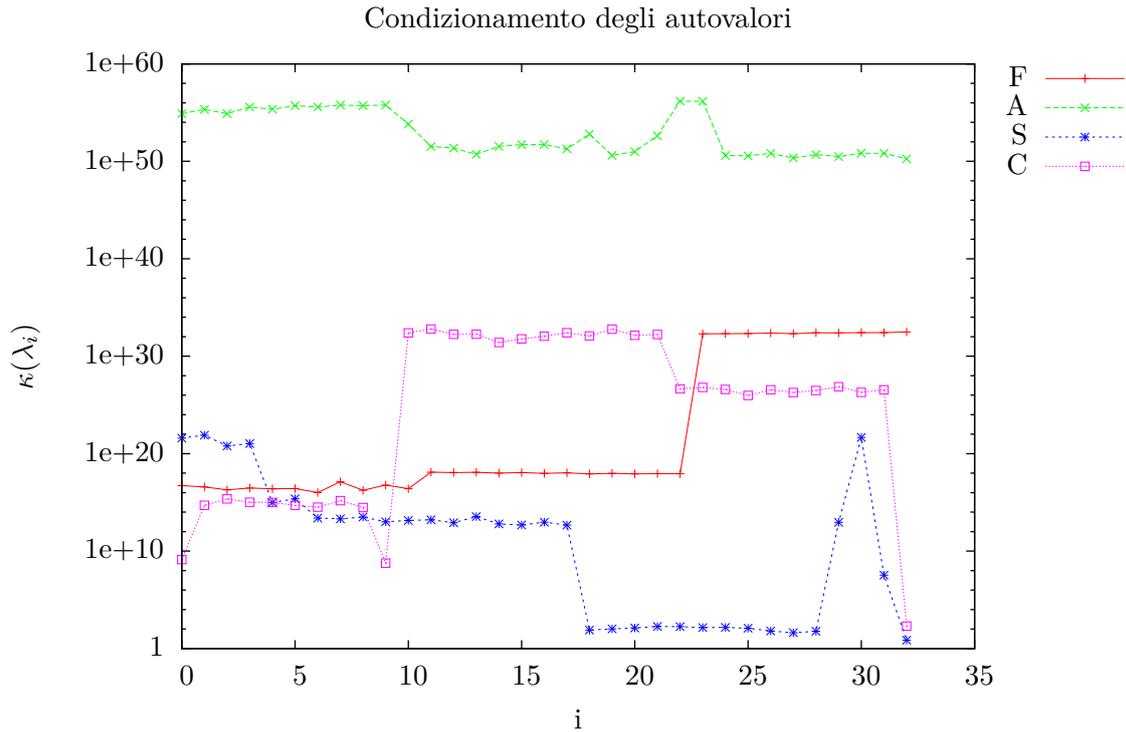


2.1.6 Sesto test

Il polinomio $p(x) = (x + 1)^{4+n} \cdot (x + 100)^{2+n} \cdot (100x + 1)^{3+n}$ ha i tre zeri $-1, -100, -\frac{1}{100}$ multipli che vanno a costituire tre cluster ben separati. Si è testato con $n = 4$ un polinomio di grado 21 prendendo gli x_i equispaziati su tre circonferenze centrate sui cluster e di raggio $\varepsilon = 10^{-3}$, in numero pari alla molteplicità della radice multipla.

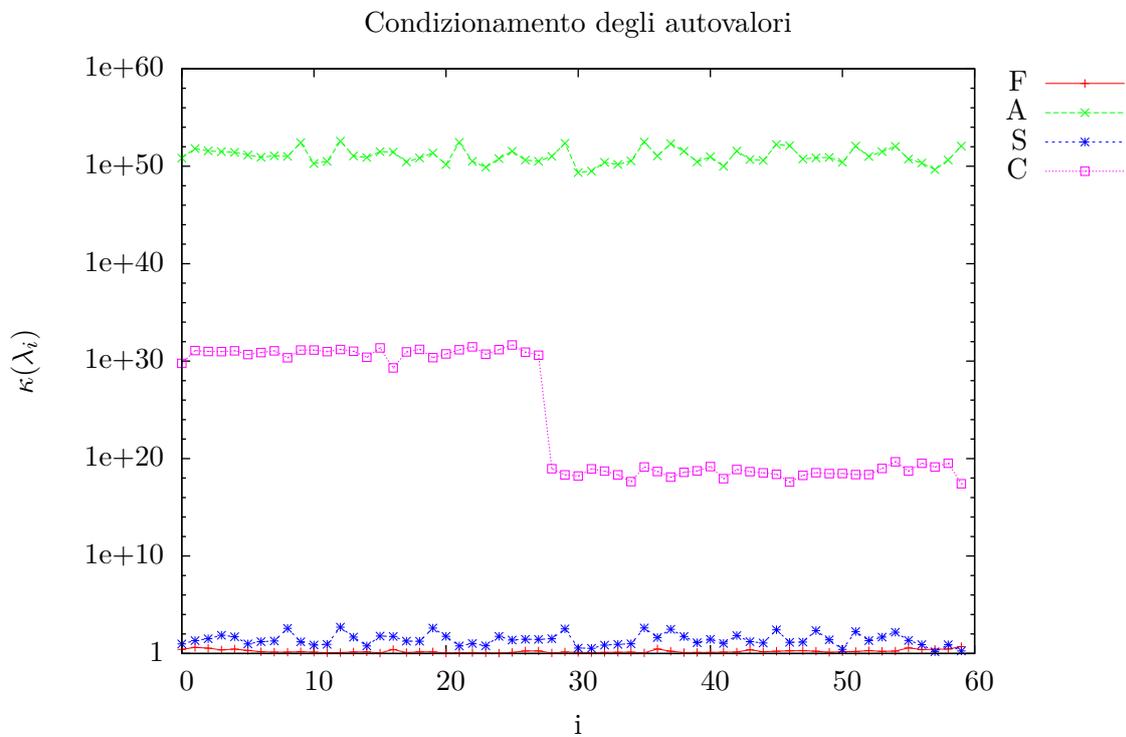


Per $n = 8$ e la scelta dei nodi x_i come sopra, si ottiene il seguente grafico.



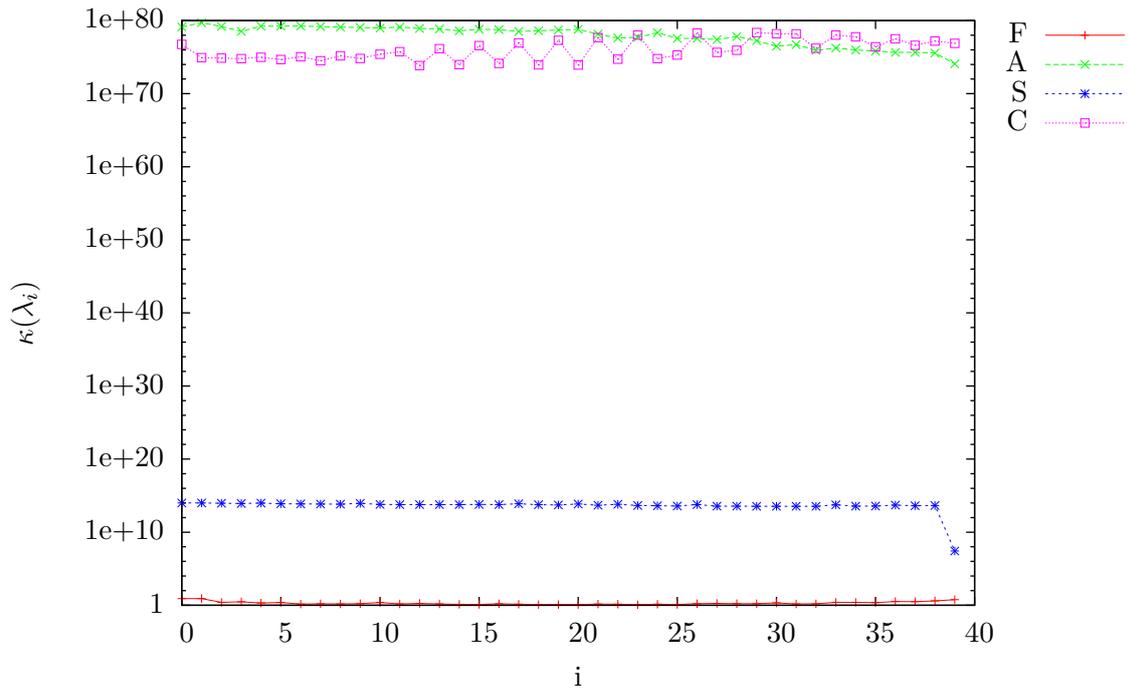
2.1.7 Settimo test

Si è generato un polinomio di grado $n = 60$ con coefficienti random, e si sono scelti gli x_i perturbando le radici con un numero complesso di modulo $\varepsilon = 0.1$.



Generando in maniera pseudocasuale i coefficienti di un polinomio di grado $n = 40$ e scegliendo gli x_i equispaziati su una circonferenza di centro l'origine e raggio sufficiente a contenere tutte le radici di p , si è ottenuto il seguente grafico.

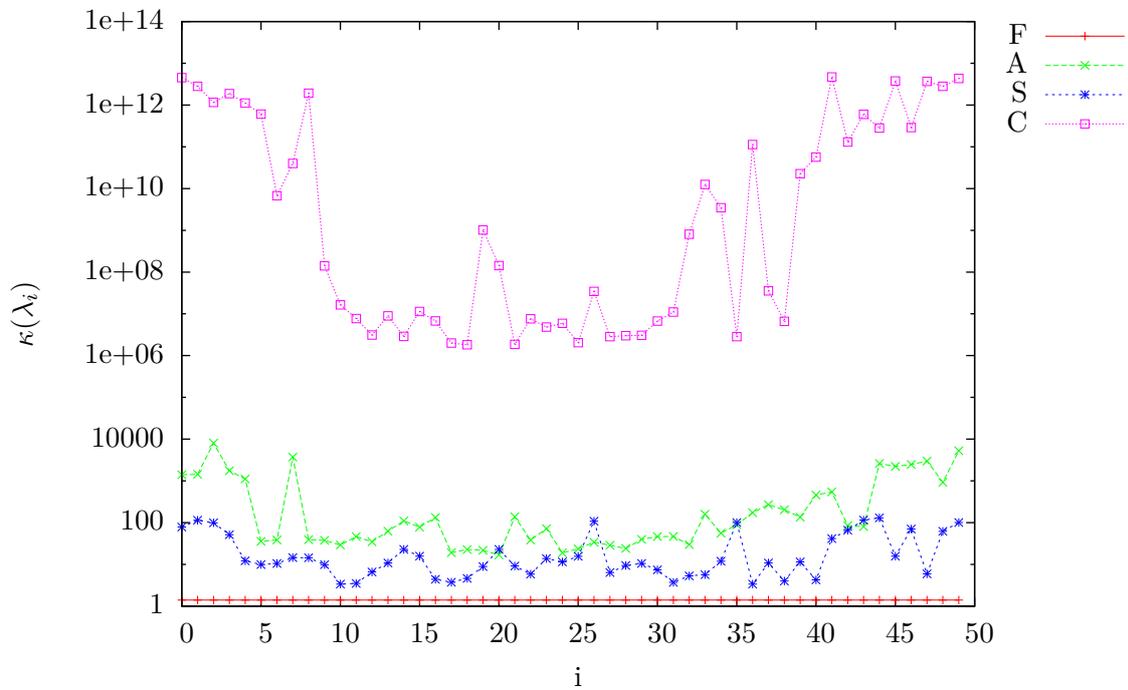
Condizionamento degli autovalori



2.1.8 Ottavo test

In questo caso $p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$, con $n = 50$ e gli x_i ottenuti perturbando le radici esatte con un numero complesso pseudocasuale di modulo $\varepsilon = 0.1$.

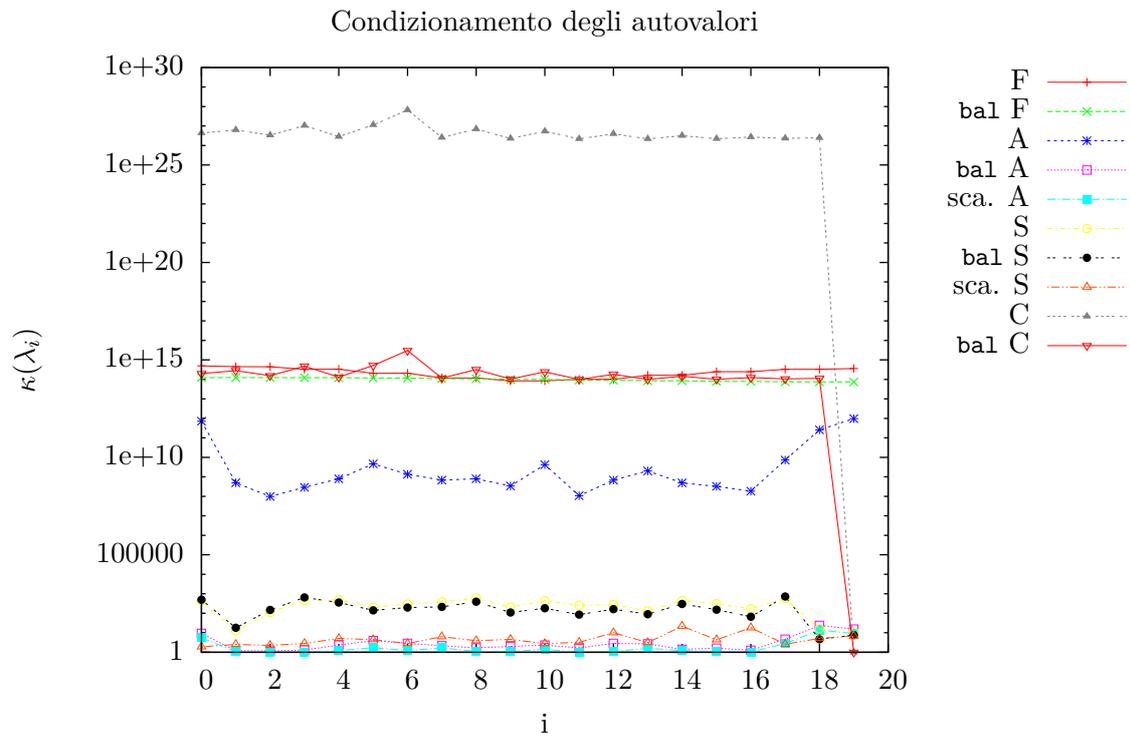
Condizionamento degli autovalori



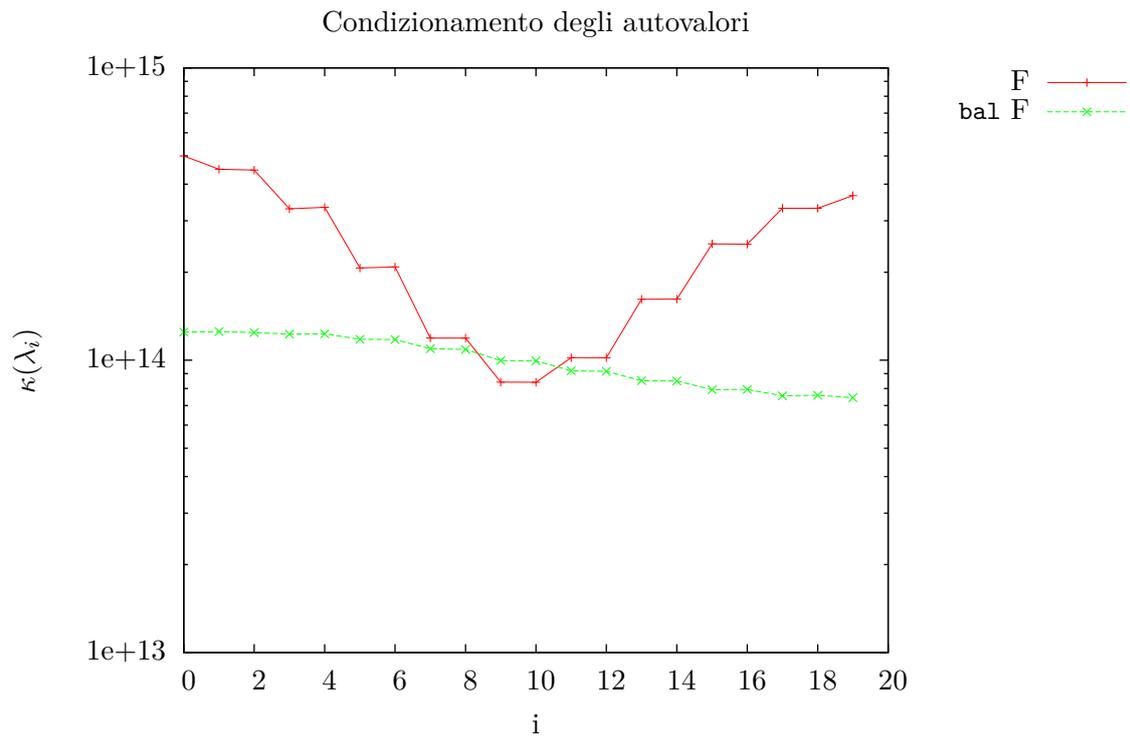
2.2 Bilanciamento

2.2.1 Primo test

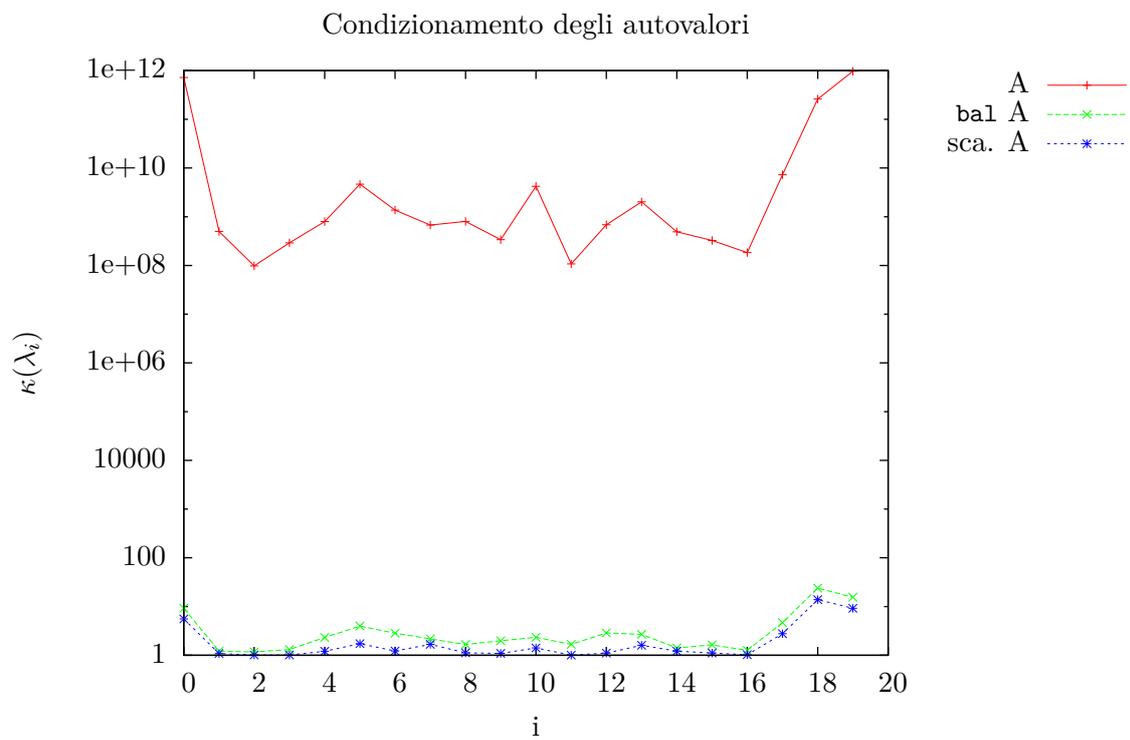
Si è usato il polinomio $p(x) = (x + 1)^{20}$ scegliendo gli x_i equispaziati su una circonferenza di centro -1 e raggio 0.01 .



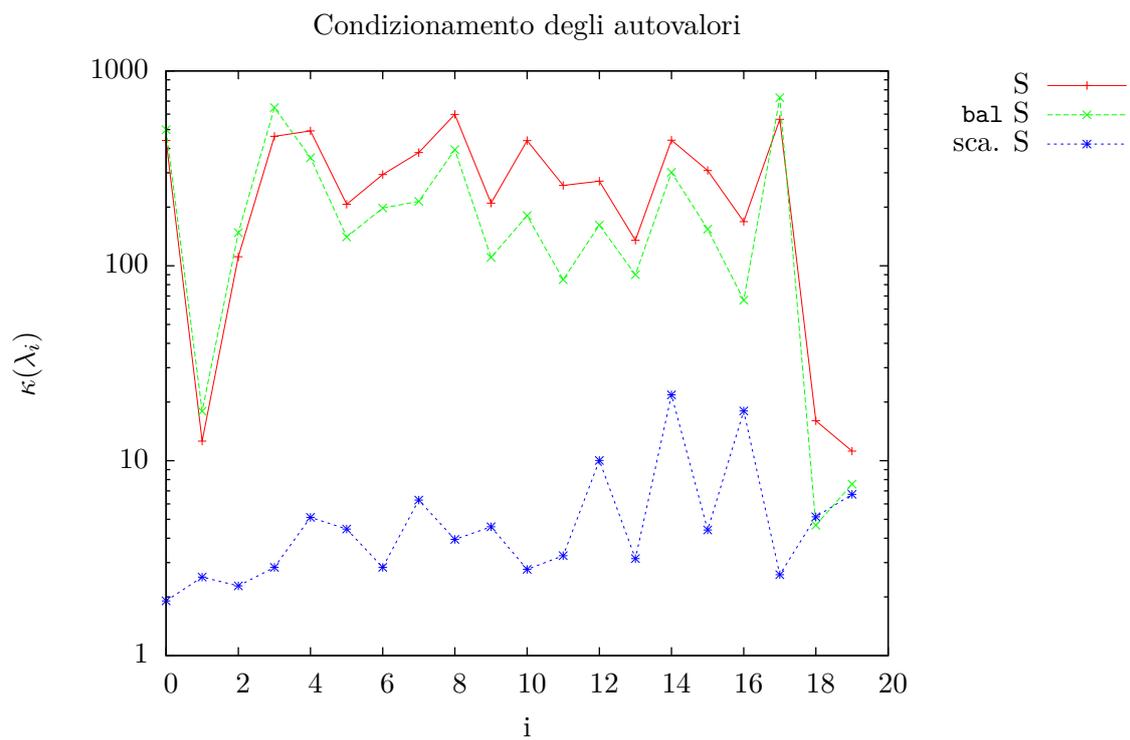
Considerando soltanto la companion di Frobenius si può osservare il risultato del bilanciamento.



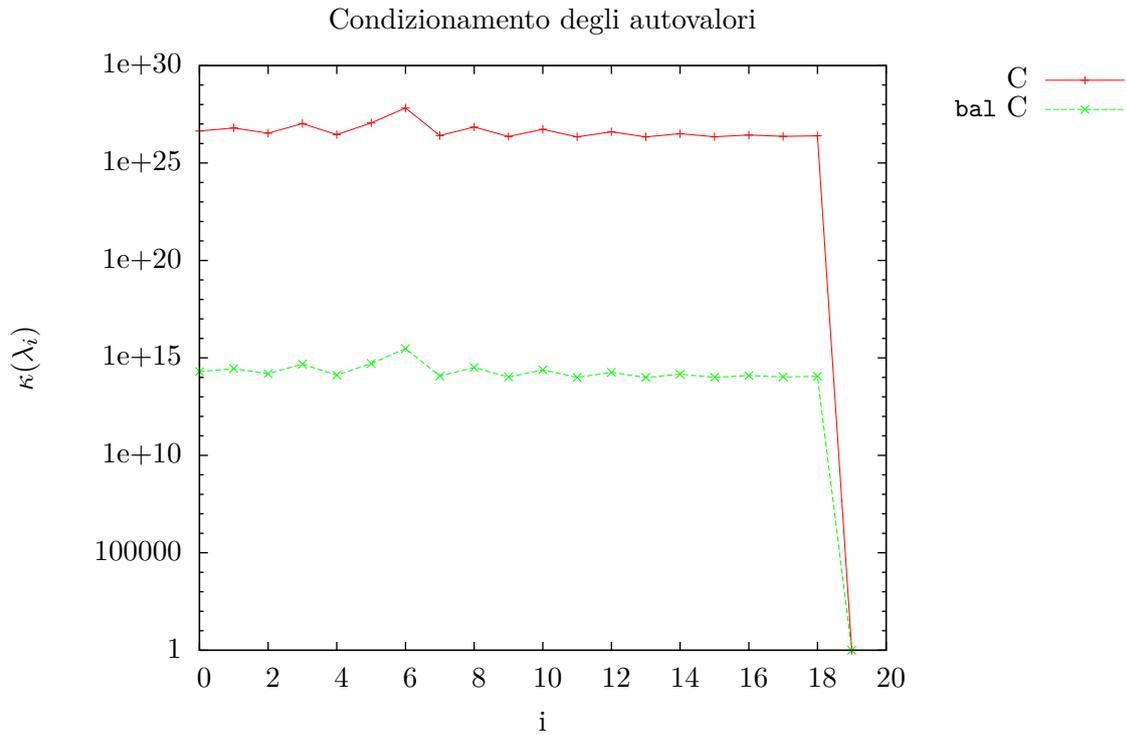
Forma Arrowhead non bilanciata, bilanciata tramite la funzione `balance()` di Octave, e con il metodo di scalatura introdotto nella sezione 1.2.



Effetti dei due tipi di bilanciamento sulla forma di Smith.

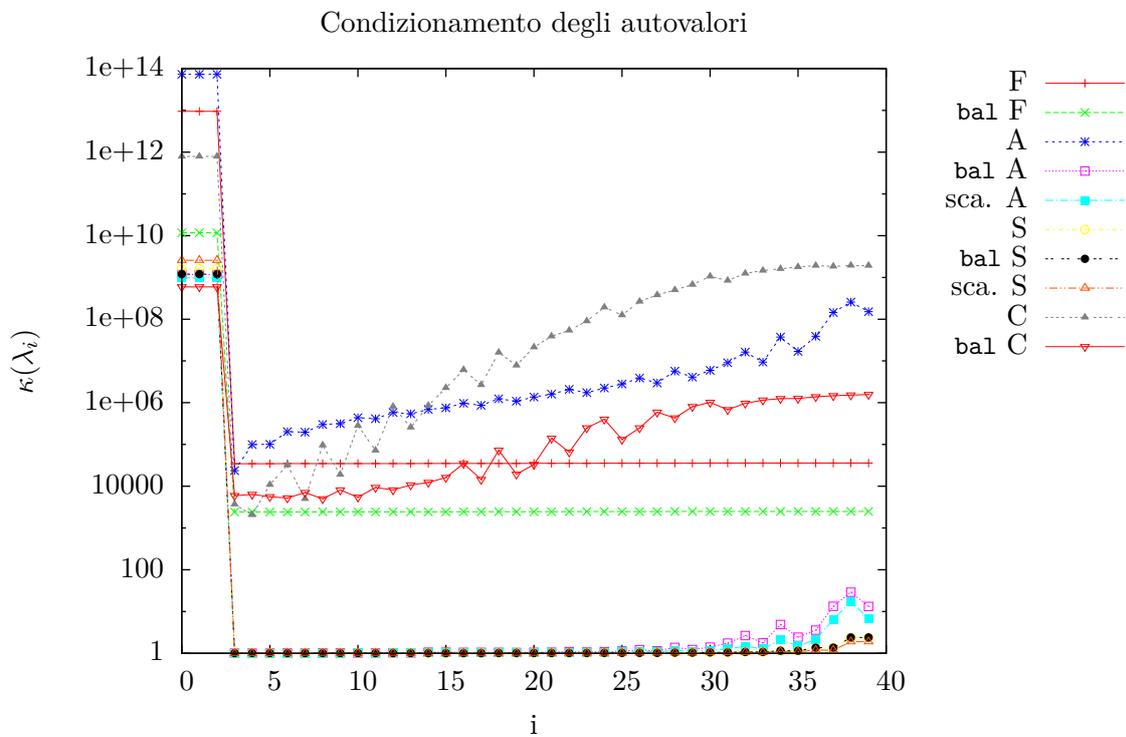


Infine, la forma Colleague.



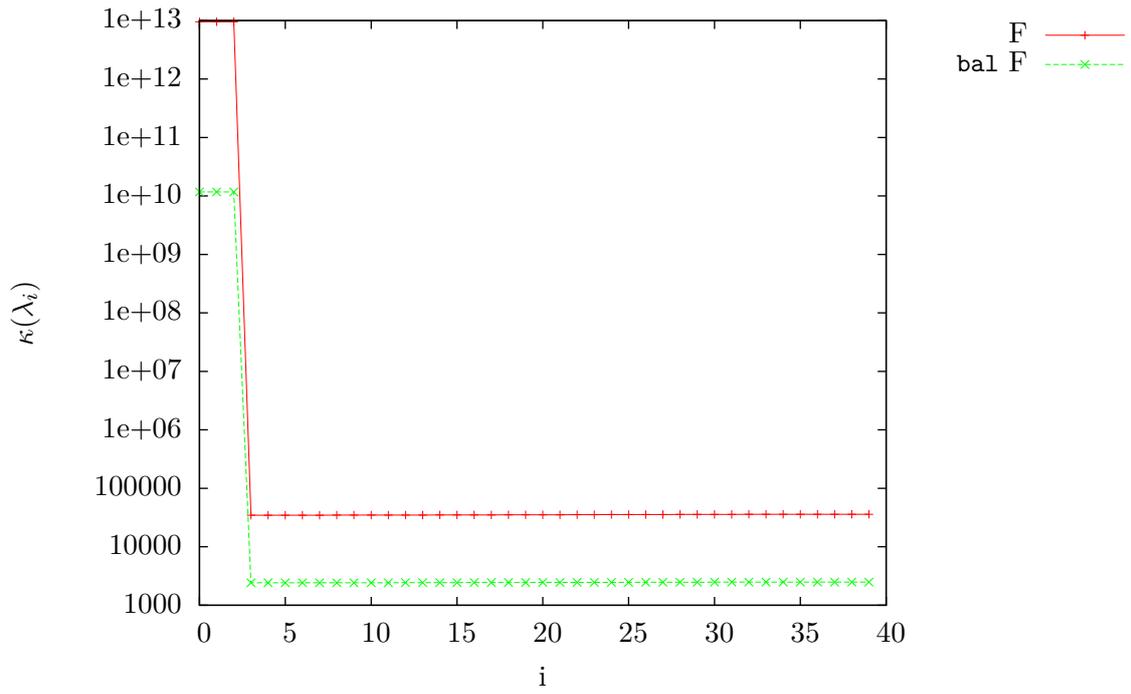
2.2.2 Secondo test

Si è usato il polinomio di Mignotte $p(x) = x^n + (100x + 1)^3$ con $n = 40$. x_1, x_2, x_3 sono stati scelti equispaziati sulla circonferenza di centro $-\frac{1}{100}$ e raggio 0.01, mentre gli x_i con $i \geq 4$ equispaziati su una circonferenza di centro il baricentro di tutte le altre radici e raggio sufficiente a contenerle tutte (cfr. la funzione `baricircolo()`). Complessivamente, gli effetti dei bilanciamenti sono riassunti nel grafico seguente.

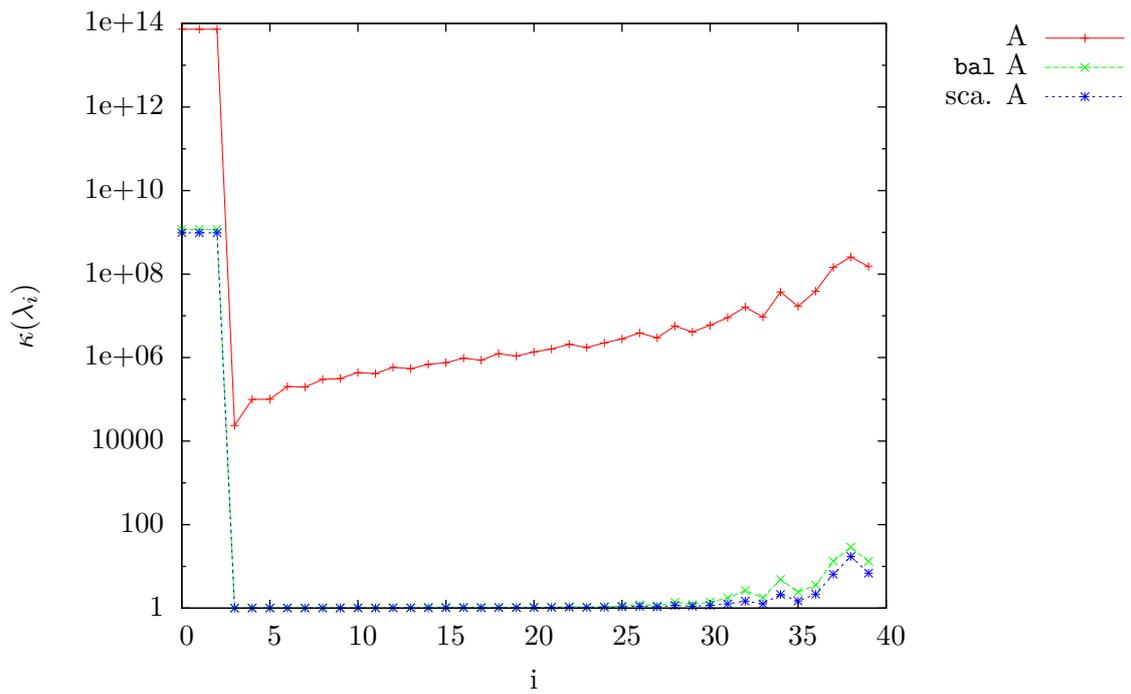


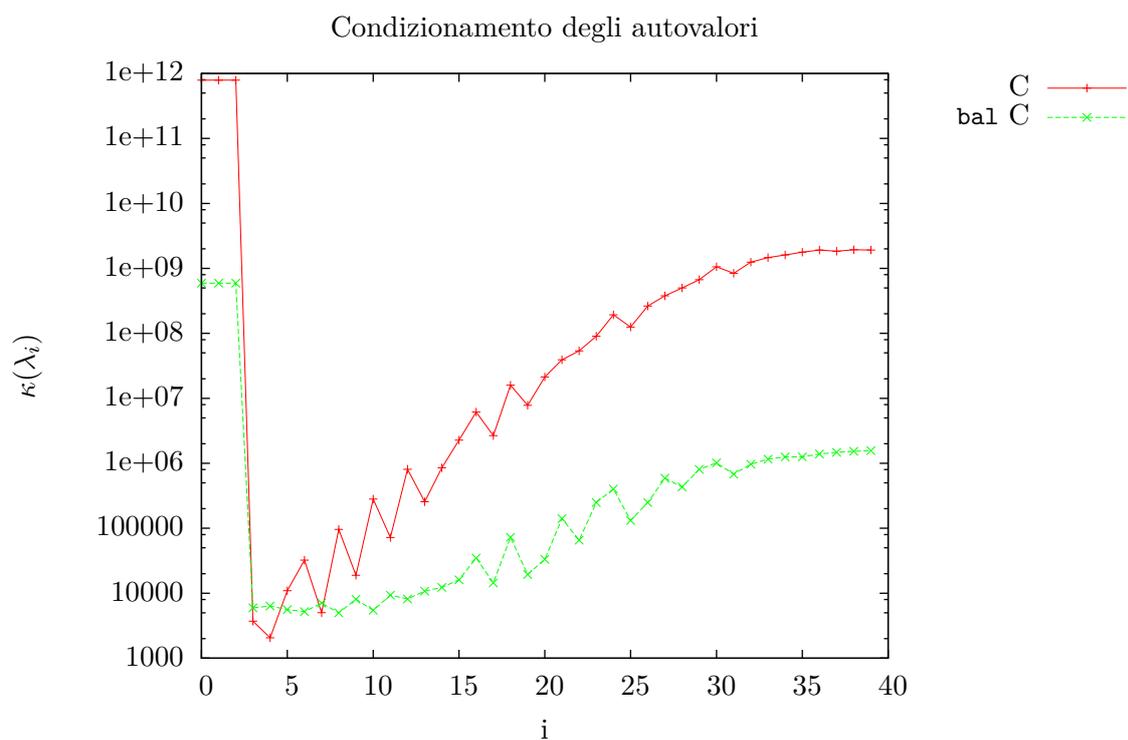
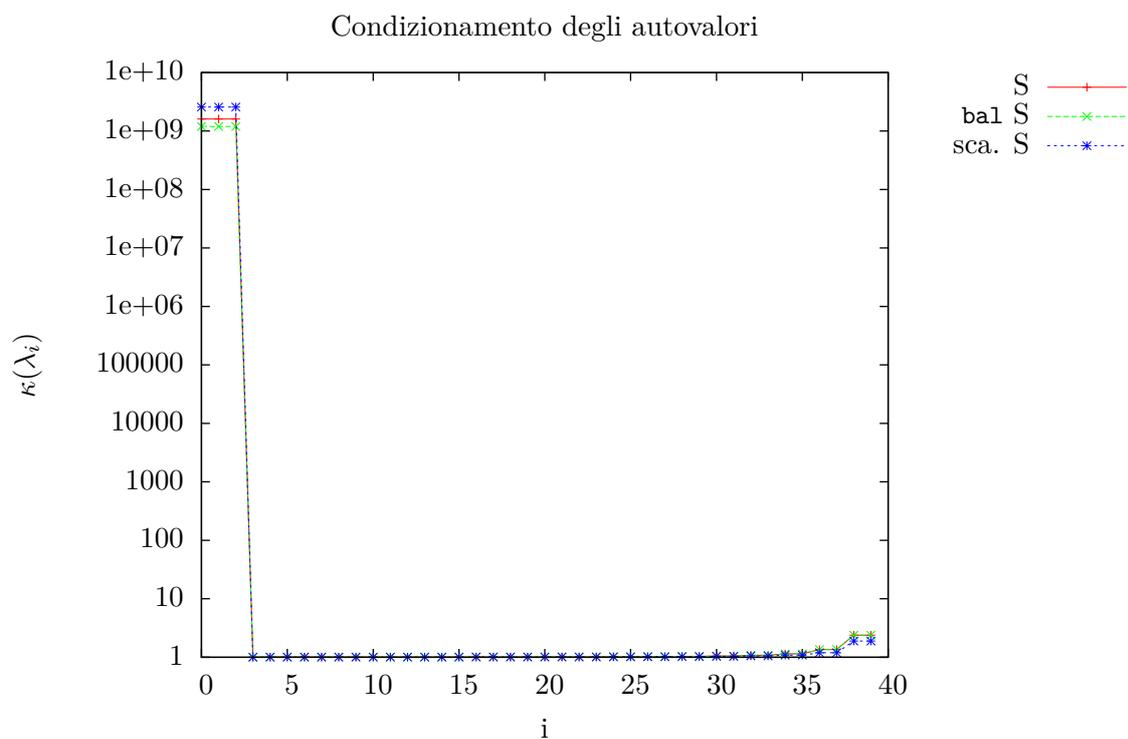
Mentre l'effetto dei bilanciamenti sulle singole forme companion è illustrato di seguito.

Condizionamento degli autovalori



Condizionamento degli autovalori

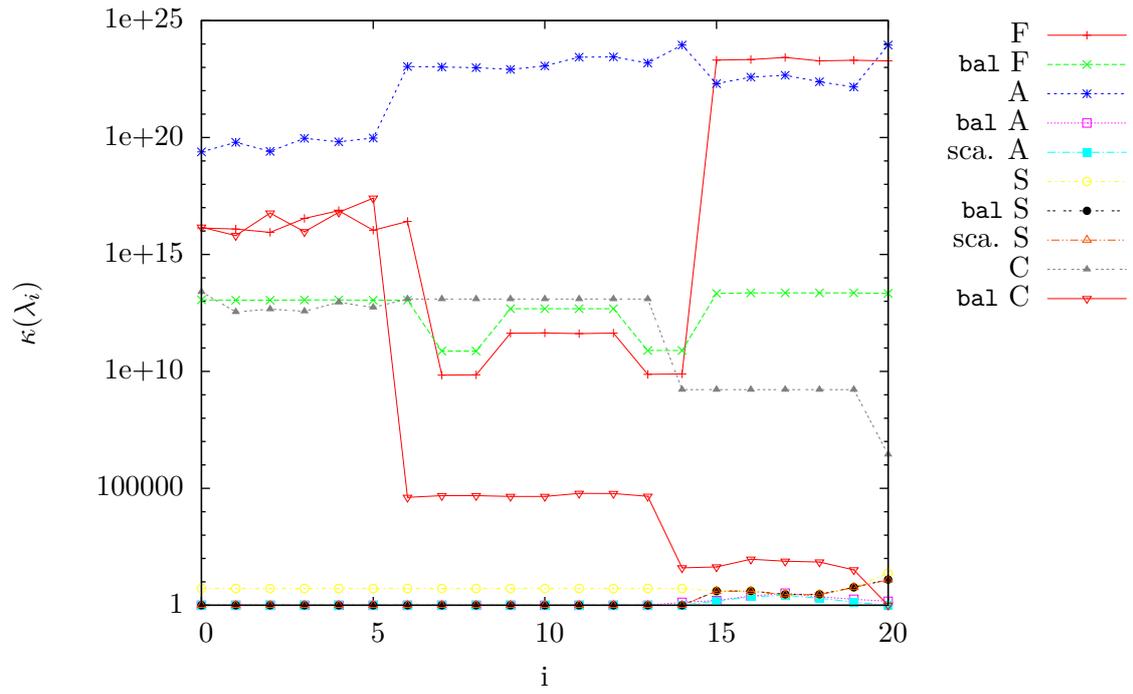




2.2.3 Terzo test

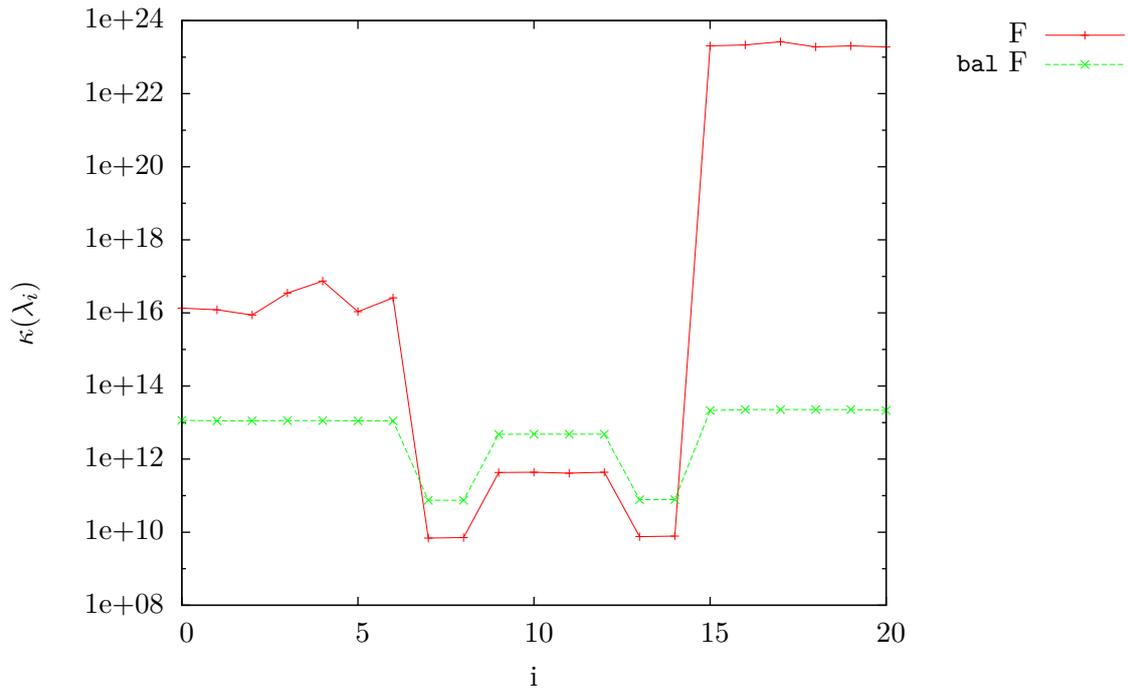
Si è usato $p(x) = (x + 1)^{4+n} \cdot (x + 100)^{2+n} \cdot (100x + 1)^{3+n}$, scegliendo gli x_i equispaziati sulle circonferenze centrate sui tre cluster e di raggio $\varepsilon = 0.01$.

Condizionamento degli autovalori

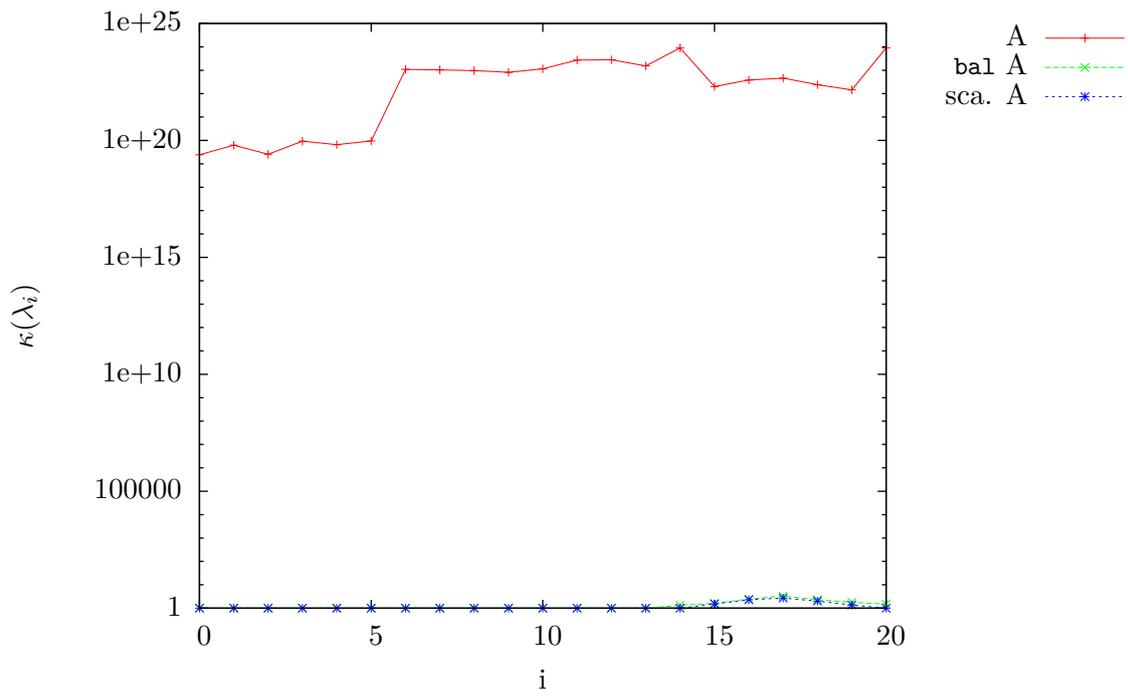


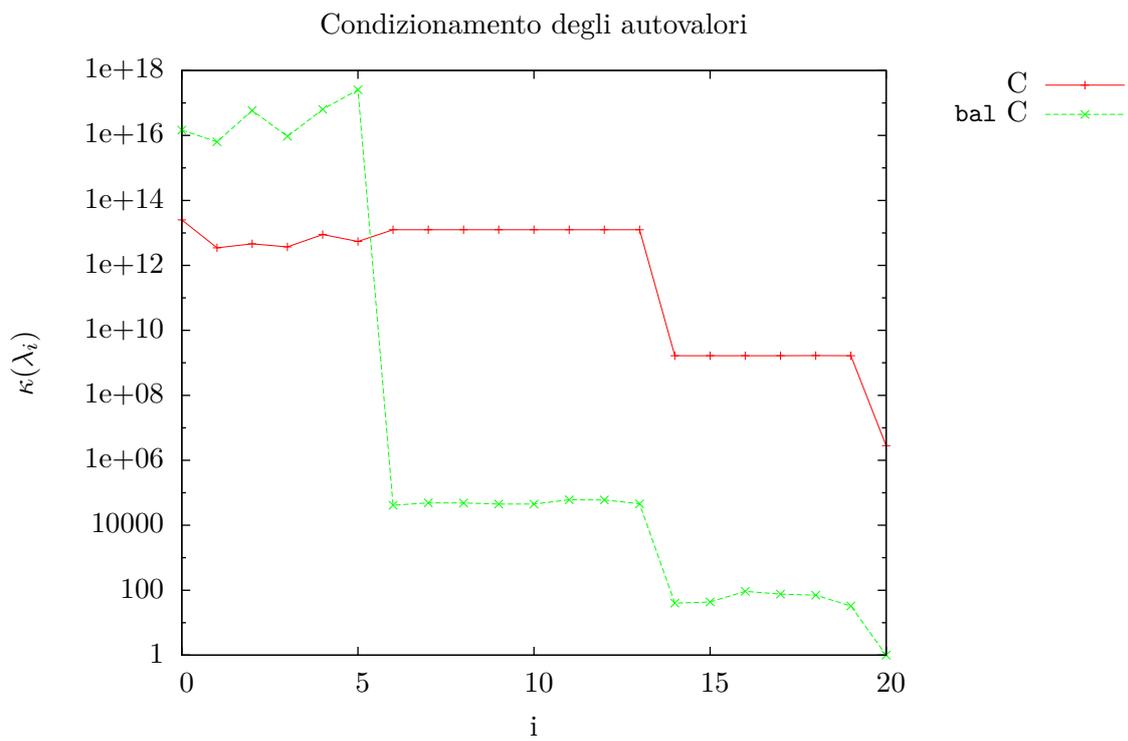
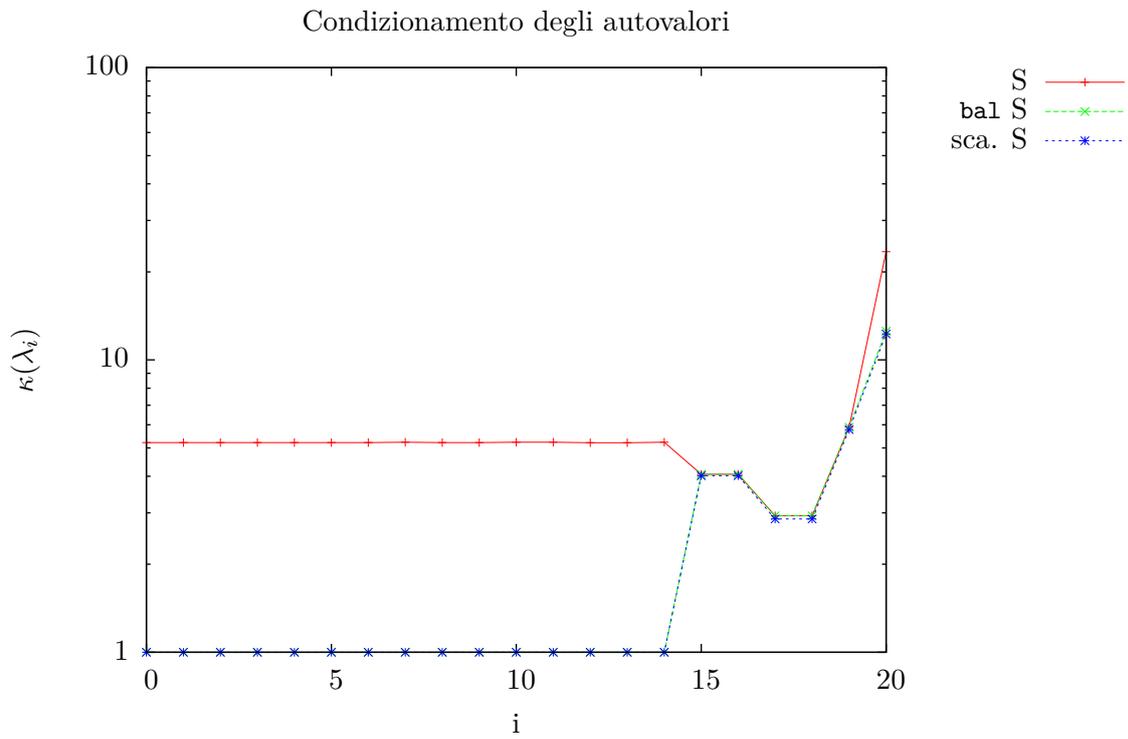
Segue il comportamento delle singole forme companion rispetto al bilanciamento.

Condizionamento degli autovalori



Condizionamento degli autovalori





Riportiamo infine i valori numerici dei numeri di condizionamento per le varie forme companion e i metodi di bilanciamento.

	Frobenius		Arrowhead			Smith			Colleague	
	unbal.	balance	unbal.	balance	scal.	unbal.	balance	scal.	unbal.	balance
κ_1	$1.35589 \cdot 10^{16}$	$1.15128 \cdot 10^{13}$	$2.42694 \cdot 10^{19}$	1	1	5.21432	1	1	$2.51834 \cdot 10^{13}$	$1.46465 \cdot 10^{16}$
κ_2	$1.21957 \cdot 10^{16}$	$1.10743 \cdot 10^{13}$	$6.20264 \cdot 10^{19}$	1	1	5.21432	1	1	$3.48843 \cdot 10^{12}$	$6.38345 \cdot 10^{15}$
κ_3	$8.79327 \cdot 10^{15}$	$1.10778 \cdot 10^{13}$	$2.57032 \cdot 10^{19}$	1	1	5.21438	1	1	$4.61549 \cdot 10^{12}$	$5.87311 \cdot 10^{16}$
κ_4	$3.4934 \cdot 10^{16}$	$1.12879 \cdot 10^{13}$	$9.29396 \cdot 10^{19}$	1	1	5.21438	1	1	$3.71949 \cdot 10^{12}$	$9.3805 \cdot 10^{15}$
κ_5	$7.46751 \cdot 10^{16}$	$1.12888 \cdot 10^{13}$	$6.57384 \cdot 10^{19}$	1	1	5.21444	1	1	$8.94885 \cdot 10^{12}$	$6.36271 \cdot 10^{16}$
κ_6	$1.08475 \cdot 10^{16}$	$1.10768 \cdot 10^{13}$	$9.51636 \cdot 10^{19}$	1	1	5.21444	1	1	$5.45906 \cdot 10^{12}$	$2.5377 \cdot 10^{17}$
κ_7	$2.58478 \cdot 10^{16}$	$1.10792 \cdot 10^{13}$	$1.09613 \cdot 10^{23}$	1.00091	1.00029	5.21446	1	1	$1.2501 \cdot 10^{13}$	41157.9
κ_8	$6.90216 \cdot 10^9$	$7.45347 \cdot 10^{10}$	$1.02946 \cdot 10^{23}$	1.00119	1.00065	5.23062	1.00004	1.00004	$1.2501 \cdot 10^{13}$	48728.3
κ_9	$7.11033 \cdot 10^9$	$7.45351 \cdot 10^{10}$	$9.64926 \cdot 10^{22}$	1.001	1.00054	5.21249	1.00005	1.00005	$1.25023 \cdot 10^{13}$	48658.2
κ_{10}	$4.30117 \cdot 10^{11}$	$4.77786 \cdot 10^{12}$	$8.14351 \cdot 10^{22}$	1.00134	1.00098	5.21249	1.00005	1.00005	$1.2504 \cdot 10^{13}$	44756.4
κ_{11}	$4.38721 \cdot 10^{11}$	$4.78537 \cdot 10^{12}$	$1.14242 \cdot 10^{23}$	1.00238	1.00152	5.23144	1.00004	1.00004	$1.25023 \cdot 10^{13}$	45064.7
κ_{12}	$4.11477 \cdot 10^{11}$	$4.78533 \cdot 10^{12}$	$2.72823 \cdot 10^{23}$	1.00444	1.00333	5.23143	1.00004	1.00004	$1.2504 \cdot 10^{13}$	60608.5
κ_{13}	$4.37028 \cdot 10^{11}$	$4.79506 \cdot 10^{12}$	$2.80109 \cdot 10^{23}$	1.00426	1.00327	5.21071	1.00006	1.00006	$1.25053 \cdot 10^{13}$	60123.4
κ_{14}	$7.54488 \cdot 10^9$	$7.7917 \cdot 10^{10}$	$1.54235 \cdot 10^{23}$	1.00246	1.00206	5.21071	1.00006	1.00006	$1.25053 \cdot 10^{13}$	45650.3
κ_{15}	$7.82691 \cdot 10^9$	$7.79172 \cdot 10^{10}$	$9.01037 \cdot 10^{23}$	1.33318	1.00004	5.23196	1.00004	1.00004	$1.66321 \cdot 10^9$	39.841
κ_{16}	$2.03148 \cdot 10^{23}$	$2.14266 \cdot 10^{13}$	$2.01321 \cdot 10^{22}$	1.60677	1.51151	4.06515	4.06515	4.01868	$1.66277 \cdot 10^9$	43.5695
κ_{17}	$2.15875 \cdot 10^{23}$	$2.26683 \cdot 10^{13}$	$3.84828 \cdot 10^{22}$	2.46933	2.28655	4.06518	4.06518	4.01871	$1.66344 \cdot 10^9$	92.5455
κ_{18}	$2.64054 \cdot 10^{23}$	$2.26511 \cdot 10^{13}$	$4.58447 \cdot 10^{22}$	3.30191	2.7067	2.93141	2.93141	2.85852	$1.6638 \cdot 10^9$	76.0967
κ_{19}	$1.90004 \cdot 10^{23}$	$2.27035 \cdot 10^{13}$	$2.41873 \cdot 10^{22}$	2.30992	2.00989	2.93146	2.93146	2.85857	$1.66434 \cdot 10^9$	70.2623
κ_{20}	$2.03061 \cdot 10^{23}$	$2.27065 \cdot 10^{13}$	$1.45107 \cdot 10^{22}$	1.79288	1.36971	5.88466	5.88466	5.77917	$1.66369 \cdot 10^9$	32.6948
κ_{21}	$1.8999 \cdot 10^{23}$	$2.15249 \cdot 10^{13}$	$8.98481 \cdot 10^{23}$	1.4795	1.00045	23.4522	12.5354	12.2694	$2.81705 \cdot 10^6$	1

Riferimenti bibliografici

- [1] R.M. Corless. «Generalized Companion Matrices in the Lagrange basis». In: *Proceedings EACA*. A cura di Laureano Gonzalez Vega e Tomas Recio. 2004, pp. 317–322.
- [2] R.M. Corless e G. Litt. *Generalized companion matrices for polynomials not expressed in monomial bases*. Rapp. tecn. Ontario Research Centre for Computer Algebra, 2001.
- [3] James W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997.