Il piano infinito di corrente

Salvatore Baldino

20 luglio 2013

1 Introduzione: spiegazione del problema

Si vuole trovare il campo elettromagnetico (o meglio, i potenziali) associato ad una corrente uniforme, presente solo su un piano (nel sistema di riferimento scelto, si usa il piano $z = 0$). Sia J la corrente sul piano, ρ la carica libera presente su di esso. Si assume che non vi sia una carica superficiale sul piano: ciò è coerente con l'equazione di continuità per distribuzioni superficiali ($\nabla\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, con $\nabla = \partial_x + \partial_y$), in quanto la distribuzione di corrente è uniforme.

La distribuzione di corrente e carica presa in esame è quindi $\rho = 0, \vec{J} = \delta(z)f(t)\hat{y}$, con $f(t)$ funzione trasformabile con Fourier.

Le equazioni per i potenziali, in gauge di Lorentz ($\nabla\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$), sono:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = 4\pi\rho$$
$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \frac{4\pi\vec{J}}{c}$$

Nel caso in esame, inserendo le sorgenti, si ha:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = 0 \tag{1}$$
$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \frac{4\pi\delta(z)f(t)\hat{y}}{c} \tag{2}$$

Nel documento si risolveranno tali equazioni in vari metodi. Verrà prima studiato il caso in cui $f(t)$ è una funzione oscillante monocromatica di pulsazione ω_0, $f(t) = j_0(\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$ (si sceglie ampiezza dipendente dalla costante in uso per motivi che saranno più chiari in seguito): il risultato verrà quindi generalizzato alle $f(t)$ (funzioni o distribuzioni) trasformabili con Fourier. Ci si concentrerà sulla soluzione particolare dell'equazione, in quanto le soluzioni libere hanno forma banale di propagazione nel vuoto.

Le soluzioni per i potenziali in gauge di Lorentz richiedono come ipotesi che la distribuzione di carica e corrente sia localizzata (cioè deve esistere una palla di raggio r tale che, fuori da tale palla, le due distribuzioni siano identicamente nulle): come è evidente, questo non è il caso del problema in esame.

2 Soluzione per oscillazioni monocromatiche

2.1 Soluzione per integrali con considerazioni fisiche

In questo metodo, si ipotizzano delle forme per i potenziali, per poi determinare che tali potenziali sono effettivamente soluzioni. Attraverso considerazioni fisiche si sceglieranno delle forme particolari per la soluzione per semplificare i conti: ovviamente se non si trova una soluzione in tale maniera si faranno cadere le ipotesi derivanti da tali considerazioni. Si farà uso dei teoremi di Gauss e di Stokes per determinare le costanti nelle soluzioni. Per comodità, si riportano le equazioni di Maxwell e le equazioni che legano i campi ai potenziali: dal punto di vista matematico si possono vedere le prime due righe come definizioni di due campi vettoriali per i quali usare i suddetti teoremi è più semplice.

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{4}$$

$$\nabla\vec{E} = 4\pi\rho \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\nabla\vec{B} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{8}$$

Le equazioni di Maxwell possono essere ricavate (all'inverso!) dalle equazioni per i potenziali e dall'equazione di gauge scelta.
Dato che non vi sono cariche, la soluzione particolare per ϕ è $\phi = 0$. Per quanto riguarda il potenziale vettore, l'equazione che determina $\vec{A}$ è omogenea in qualsiasi punto fuori dal piano $z = 0$: si ipotizza $\phi = 0$ e $\vec{A}$ oscillazione monocromatica (del tipo $\vec{A_0}e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$, con $\vec{A_0}, \vec{k}$ vettori costanti da determinare e ω costante da determinare (anche se, per considerazioni fisiche, è abbastanza ovvio $\omega = \omega_0$: se ne darà una dimostrazione)).
La soluzione di prova per il potenziale è la seguente:

$$\vec{A} = \begin{cases} A_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}, & z > 0 \\ A_1 e^{-i(kz+\omega t)}\hat{y}, & z < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Data la natura delle soluzioni, derivando in un punto qualsiasi che non sia il piano $z = 0$ si ottiene $\omega = kc$. Da tale forma del potenziale si possono ricavare i campi:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -i\frac{\omega}{c}\begin{cases} A_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}, & z > 0 \\ A_1 e^{-i(kz+\omega t)}\hat{y}, & z < 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\partial z A_y = ik\begin{cases} -A_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x}, & z > 0 \\ A_1 e^{-i(kz+\omega t)}\hat{x}, & z < 0 \end{cases} \tag{11}$$

Un appunto molto utile per il resto del problema: derivare rispetto al tempo tali campi è analogo a moltiplicarli per $-i\omega$.

Si passa ora alla determinazione delle costanti A_0, A_1, ω. Per far ciò si usano le equazioni di Maxwell scritte in precedenza in versione integrale.
Le relazioni 5 e 7 sono automaticamente soddisfatte: infatti i campi non sono orientati lungo $\hat{z}$, l'unica variabile spaziale, quindi la divergenza dei campi è automaticamente nulla. La prima relazione è determinata integrando la 6 sulla superficie $\sigma = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y \in [-a, a], z \in [-a, a]\}$ con la superficie orientata lungo $\hat{x}$ (a è un numero reale strettamente positivo): usando il teorema di Stokes si ha

$$\int_\sigma \nabla \times \vec{E} d^2\vec{x} = \int_{\partial\sigma} \vec{E} d\vec{l} =$$
$$\int_{-a}^{a} E_y(0, y, a) dy - \int_{a}^{-a} E_y(0, y, -a) dy = 2a\frac{i\omega}{c}(A_0 e^{ika} + A_1 e^{-ika})e^{-i\omega t}$$

$$\frac{i\omega}{c}\int_\sigma \vec{B} d^2\vec{x} = 2a\frac{-k\omega}{c}(\int_0^a -A_0 e^{i(kz-\omega t)} dz + \int_{-a}^{0} A_1 e^{-i(kz+\omega t)} dz) =$$
$$2a\frac{i\omega}{c}(A_0(e^{ika} - 1) - A_1(1 - e^{-ika}))e^{-i\omega t}$$

Le due quantità devono essere uguali. Si deve quindi avere $A_0 = A_1$: in tal maniera, il campo $\vec{A}$ è continuo, così come il campo $\vec{E}$, mentre il campo $\vec{B}$ è discontinuo in $z = 0$.

Attraverso la 8, si può completare il problema integrandola sulla superficie $\Sigma = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | y = 0, x \in [-a, a], z \in [-a, a]\}$, con la superficie orientata lungo $\hat{y}$. I tre integrali danno separatamente

$$\int_\Sigma \nabla \times \vec{B} d^2\vec{x} = \int_{\partial\Sigma} \vec{B} d\vec{l} =$$
$$\int_{-a}^{a} B_x(x, 0, a) dx - \int_{a}^{-a} B_y(x, 0, -a) dx = 2aikA_0(e^{ika} + e^{-ika})e^{-i\omega t}$$

$$\frac{-i\omega}{c}\int_\sigma \vec{E} d^2\vec{x} = 2a\frac{-\omega^2}{c^2}A_0(\int_0^a e^{ikz} dz + \int_{-a}^{0} e^{-ikz} dz)e^{-i\omega t} =$$
$$2aikA_0(e^{ika} + e^{-ika} - 2)e^{-i\omega t}$$

$$\frac{4\pi}{c}\int_\Sigma \vec{J} d^2\vec{x} = 2a\frac{4\pi}{c} j_0(\omega_0) e^{-i\omega_0 t}$$

Nell'ultimo integrale si è usata l'ormai famigerata definizione ingenua della delta di Dirac. Per poter fattorizzare la parte temporale si sceglie $\omega = \omega_0$. L'equazione per A_0 è quindi

$$4aikA_0 = 2a\frac{4\pi}{c} j_0(\omega_0)$$

che dà $A_0 = -i\frac{2\pi}{\omega_0} j_0(\omega_0)$. Tutte le costanti sono determinate e il problema è risolto. Si può ignorare la parte che contiene i coseni della variabile spaziale (basta rieseguire i conti), ottenendo $\vec{A} = \frac{2\pi}{\omega_0} j_0(\omega_0) sen(\frac{\omega_0}{c} z) sgn(z) e^{-i\omega_0 t}\hat{y}$.

2.2 Soluzione con trasformata e teoria delle distribuzioni

Un metodo molto più efficace (e rigoroso) di risolvere l'equazione non omogenea è usare la trasformata di Fourier. Si fanno prima delle considerazioni, analoghe alle considerazioni precedenti:

- Le sorgenti sono invarianti per traslazioni lungo gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$: la soluzione sarà indipendente dalle variabili x, y.
- L'unica equazione non omogenea è quella relativa ad A_y.

L'equazione da risolvere è quindi

$$\partial_z^2 A_y - \frac{\partial_t^2}{c^2} A_y = \frac{4\pi}{c} j_0(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} \delta(z)$$

La soluzione viene cercata a variabili separate: $A_y(z,t) = B(z)C(t)$. Scegliendo $C(t) = e^{-i\omega_0 t}$ la parte temporale è risolta, in quanto viene fattorizzato l'esponenziale e rimosso dall'equazione.

Si effettua ora la trasformata di Fourier per la sola variabile spaziale (indicando con k la variabile trasformata): ricordando che $\mathscr{F}(\delta(z)) = 1$, la A trasforma nel seguente modo: $A_y \to \widehat{A_y} = \widehat{B(k)}C(t)$. In questa maniera, l'equazione diventa (ricordando di fattorizzare e rimuovere la parte temporale)

$$(-k^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2})\widehat{B} = \frac{4\pi}{c} j_0(\omega_0)$$
$$\widehat{B} = VP \frac{4\pi j_0(\omega_0)}{c(\frac{\omega_0^2}{c^2} - k^2)}$$

VP indica il valore principale. Antitrasformando, si ha la soluzione.
Per antitrasformare, si cerca prima l'antitrasformata di $VP\frac{1}{a^2-k^2}$, con a reale: tale antitrasformata è banale, in quanto si ha

$$VP\frac{1}{a^2-k^2} = \frac{1}{2a} VP(-\frac{1}{k-a} + \frac{1}{a+k})$$

Conoscendo la trasformata del valor principale di $\frac{1}{x}$ ($\mathscr{F}(VP\frac{1}{x}) = i\pi sgn(k)$) e dal teorema di traslazione ($\mathscr{F}(f(x-a)) = e^{ika}\mathscr{F}(f(x))$) si possono ricavare le varie antitrasformate, da cui si ricava

$$B = 2\pi j_0(\omega_0) \frac{sen(\frac{\omega_0}{c} z)}{\omega_0} sgn(z)$$

Ciò risolve il problema:

$$A_y = 2\pi j_0(\omega_0) \frac{sen(\frac{\omega_0}{c} z)}{\omega_0} sgn(z) e^{-i\omega_0 t}$$

3 Soluzione generica

Si consideri il caso in cui $f(t)$ sia una funzione qualsiasi trasformabile con Fourier. L'equazione da risolvere è quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_y = \frac{4\pi}{c}\delta(z)f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi}{c}\delta(z)\widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{12}$$

con $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$. Per risolvere l'equazione, si supponga di conoscere la soluzione per l'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}B(\omega,z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B(\omega,z,t) = \delta(z)\frac{4\pi}{c}\widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t} \tag{13}$$

Tale equazione è esattamente la stessa precedentemente risolta, sostituendo $j(\omega_0)$ con $\widehat{f}(\omega)$. Si può interpretare $B(\omega,z,t)$ come risposta al segnale monocromatico di pulsazione ω: è allora naturale usare come funzione di prova per risolvere l'omogenea la seguente funzione:

$$A_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega,z,t)d\omega \tag{14}$$

Per verificare che questa sia effettivamente la soluzione, bisognerebbe portare le derivate sotto il segno di integrale. Tale passaggio, per distribuzioni abbastanza regolari (in questo caso tali che tutte le derivate fino alla seconda siano appartenenti allo spazio delle distribuzioni dal cui duale si prendono le funzioni test) è verificato, in quanto per definizione di derivata di una distribuzione si ha, per ogni funzione test ϕ nello spazio richiesto:

$$(\partial_z^2 A_y, \phi) = (A_y, \partial_z^2\phi)$$

Il poter portare le derivate sotto segno d'integrale è allora banale conseguenza del teorema di Fubini-Tonelli: basta invertire l'ordine di derivazione (integrando solo alla fine in $d\omega$) e, tramite un integrale per parti, si può scaricare la derivata su A_y all'interno dell'integrale. Intendendo le derivate come derivate distribuzionali, si può scrivere:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^2}B(\omega,z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B(\omega,z,t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi}{c}\delta(z)\widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{15}$$

Sotto il segno d'integrale vi è esattamente l'equazione differenziale risolta da B, da cui l'equazione è risolta. Conoscendo la forma di B, si può allora scrivere

$$A_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\widehat{f}(\omega)\frac{sen(\frac{\omega z}{c})}{\omega}sgn(z)e^{-i\omega t}d\omega \tag{16}$$

che è la soluzione (particolare) del sistema.