Laser

Salvatore Baldino

26 giugno 2013

1 Introduzione

Nel presente seminario, si cercherà di esporre un modello realistico per la costruzione di un laser. Lo schema seguito consiste nell'esporre dapprima il modello introdotto a lezione, per poi approfondire su alcuni dettagli (come ad esempio i processi di emissione spontanea, emissione indotta e assorbimento) utilizzando il formalismo di seconda quantizzazione per poter completare le equazioni che governano i laser: si illustrerà poi un modello realistico di laser, capendo come sono collegate le costanti matematiche delle equazioni che governano il laser con le costanti fisiche del sistema.

2 Processi di transizione: analisi qualitativa in seconda quantizzazione

Nello studiare i laser bisogna avere presente i principali processi che avvengono all'interno degli atomi. Si userà il formalismo di seconda quantizzazione, che porta a spiegare tali processi: nel seguito se ne darà solo un'analisi qualitativa, in quanto il calcolo esplicito dei coefficienti di transizione, oltre ad essere fuori dallo scopo del presente seminario, è reso praticamente inutile dalle varie perturbazioni negli atomi (che vengono trascurate nell'analisi). Il formalismo di seconda quantizzazione consiste nell'accoppiamento minimale $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ e nell'aggiungere all'hamiltoniana H_0 del sistema l'hamiltoniana di radiazione

$$H_{rad} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar \omega a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} a_{\vec{k},\lambda} \tag{1}$$

 \vec{A} è genericamente definito come

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}} \epsilon_{\lambda} a_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}} \epsilon_{\lambda}^* a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} e^{i(-\vec{k}\vec{x} + \omega t)}$$
(2)

Si considererà nel seguito l'approssimazione di dipolo: il termine oscillante nel potenziale vettore verrà posto ad 1. Ciò implica che sia kx << 1: questo vuol dire che le cariche devono essere localizzate in una zona molto piccola, al massimo dell'ordine di $\frac{1}{k}$. La lunghezza tipica del sistema è il raggio di Bohr r_B : deve essere $kr_B << 1$ per la validità dell'approssimazione (scegliendo quindi fotoni a bassa frequenza).

Uno stato del sistema può essere decomposto nella parte atomica e nello spazio di Fock relativo ai fotoni: ogni stato può essere decomposto come $|\psi\rangle = |n,l,m\rangle \otimes |r,\vec{k},\lambda\rangle$, dove il primo ket è relativo al sistema descritto da H_0 (si è scelto un ket tipico da atomo di idrogeno per dare un esempio della trattazione), mentre il secondo ket rappresenta uno stato con r fotoni di polarizzazione λ propagantesi lungo \vec{k} . $|\Omega\rangle$ indica lo stato di vuoto, in cui nessun fotone si propaga: tale stato è importante nei processi di assorbimento ed emissione spontanea. Formalmente, lo stato $|r,\vec{k},\lambda\rangle$ si ottiene dall'applicazione ripetuta di $a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}$ allo stato di vuoto: si ha $(a_{\vec{k},\lambda}^{\dagger})^r |\Omega\rangle = \sqrt{r!} |r,\vec{k},\lambda\rangle$. Da tale relazione, dal fatto che applicare l'operatore di distruzione al vuoto dà sempre 0 e dalla relazione di commutazione fondamentale $[a_{\vec{k},\lambda},a_{\vec{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$ si possono ottenere tutti gli elementi di matrice che saranno necessari nel seguito.

Si ricorda che il rate di transizione è espresso dalla regola di Fermi: la probabilità di transizione per unità di tempo è data da $T = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|H'|i\rangle|^2 \rho$, dove ρ è la densità di stati e H' è la perturbazione (che in questa situazione è data dal termine $\vec{A}\vec{p}$: per perturbazioni monocromatiche (termine per termine in \vec{A}) la densità degli stati è proporzionale alla delta di Dirac $\delta(E_i - E_f)$, con le energie calcolate con Hamiltoniane imperturbate: nel caso di assorbimento si ha che all'energia iniziale va aggiunto il termine $\hbar\omega$, mentre nelle emissioni tale termine va aggiunto all'energia finale. La delta discrimina i versi dei processi: essendo infatti $|\langle f|H'|i\rangle|^2 = |\langle i|H'|f\rangle|^2$ la presenza della delta rende nulle delle transizioni con elemento di matrice non nullo tra gli stati (come ad esempio un'emissione di fotone con aumento di energia del sistema). La delta impone quindi la conservazione dell'energia.

Il generico elemento di matrice per il sistema è dato da $\frac{e}{mc} \langle n', l', m' | \vec{p} | n, l, m \rangle \times \langle r', \vec{k'}, \lambda' | \vec{A} | r, \vec{k}, \lambda \rangle$, dove le lettere primate sono riferite allo stato finale. Il primo elemento è proporzionale al momento di dipolo tra i due stati (ciò si ottiene riscrivendo $\vec{p} = \frac{m}{i\hbar} [\vec{x}, H_0]$): questo può quindi essere chiamato direttamente momento di dipolo $\vec{d}_{f,i}$. Si distinguono tre tipi di processi:

• Assorbimento: lo stato iniziale è un atomo ad un certo livello di energia e r fotoni che si propagano, mentre lo stato finale è un atomo ad un livello di energia più alto con r-1 fotoni che si propagano. La delta seleziona le transizioni possibili: per avere transizione deve essere $\hbar\omega = E_{fin} - E_{in}$: solo tali fotoni possono dare le transizioni possibili. Gli stati possono essere formalizzati con $|i\rangle = |n, l, m\rangle \otimes |r, \vec{k}, \lambda\rangle$, $|f\rangle = |n', l', m'\rangle \otimes |r-1, \vec{k}, \lambda\rangle$ (lo stato finale energetico dell'elettrone è ad energia maggiore dello stato iniziale: ciò compensa la perdita del fotone). Oltre al momento di dipolo \vec{d}_{fi} , l'elemento di matrice non nullo necessario è

$$\left\langle r - 1, \vec{k}, \lambda \middle| \vec{A} \middle| r, \vec{k}, \lambda \right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}} r \epsilon_{\lambda}$$
 (3)

L'elemento di matrice è proporzionale alla radice del numero di fotoni, quindi il rate (che è proporzionale al modulo quadro) è proporzionale al numero di fotoni. Chiamando σ_{ass} la sezione d'urto non calcolata (che viene dall'altro elemento di matrice) si può scrivere che la popolazione dei livelli eccitati varia seguendo la legge $\frac{dn}{dt} = \sigma_{ass} F n$, dove F è il flusso di fotoni direttamente dipendente dal loro numero.

- Emissione indotta: il processo è esattamente speculare al processo di assorbimento, con la differenza che i fotoni sono nello stato iniziale. In tale processo, $|i\rangle = |n,l,m\rangle \otimes \Big|r,\vec{k},\lambda\Big\rangle, \ |f\rangle = |n',l',m'\rangle \otimes \Big|r+1,\vec{k},\lambda\Big\rangle.$ L'elemento di matrice è il complesso coniugato del precedente, con la sostituzione $r\to r+1$: anche in questo caso l'elemento è proporzionale a \sqrt{r} , da cui l'equazione per la popolazione è analoga alla precedente, con la sezione d'urto σ_{emi} e un segno meno per indicare che i livelli eccitati si spopolano. Osservando il ket finale, si nota che in questo processo il fotone aggiunto al sistema ha le stesse caratteristiche dei fotoni appartenenti al fascio incidente.
- Emissione spontanea: il ket iniziale consiste di uno stato eccitato senza nessun fotone, mentre nel ket finale vi è un fotone e l'atomo è decaduto. E' questo uno dei risultati nuovi della seconda quantizzazione. L'elemento di matrice è analogo ai precedenti, ma in questo caso r=1: in un processo di emissione spontanea, non essendovi fotoni incidenti, non si ha dipendenza dal flusso. Il fotone indotto ha caratteristiche casuali: la distribuzione angolare del suo vettore di propagazione, ad esempio, dipende dalla sua relazione col momento di dipolo.

3 Modello realistico di laser a tre livelli

In questa sezione si esamina un modello di laser a tre livelli, analizzato da Maiman nel 1960. Il sistema è un rubino di Al_2O_3 , e le transizioni sono fatte dal Cr^{3+} . Tale sistema, caratterizzato da tre livelli energetici con uguale degenerazione (saranno chiamati nel seguito $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ di energie in ordine crescente E_1 , E_2 , E_3 , è caratterizzato dalle seguenti equazioni di rate (le popolazioni dell'*i*-esimo livello sono indicate con N_i , ed è assunto per ipotesi che $N_1 + N_2 + N_3 = N$ costante):

$$\frac{dN_3}{dt} = W_{13}N_1 - (W_{31} + A_{31} + S_{32})N_3 = 0; (4)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{12}N_1 - (A_{21} + W_{21})N_2 + S_{32}N_3 = 0; (5)$$

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0. ag{6}$$

Le equazioni sono valutate in condizioni di equilibrio, per le quali $\frac{dN_i}{dt} = 0$. Le costanti nelle equazioni hanno il seguente significato: W_{ij} sono rate di transizione (probabilità per unità di tempo) per le transizioni stimolate $i \to j$, le A_{ij} sono i rate per le transizioni spontanee, S_{32} è il rate per il rilassamento $3 \to 2$. In tale sistema particolare possono essere effettuate delle ipotesi: $A_{31} << S_{32}$ (l'emissione spontanea è tanto più favorita quanto più sono vicini i livelli energetici), $W_{31} << S_{32}$. In tali condizioni, la popolazione del livello più eccitato è sicuramente molto minore della popolazione dei livelli meno eccitati, da cui la soluzione può essere approssimata da

$$\frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{W_{13} - A_{21}}{W_{13} + A_{21} + 2W_{12}} \tag{7}$$

La frequenza desiderata di transizione è la frequenza ν_{21} , da cui il livello 2 deve essere più popolato del livello 1 per ottenere l'inversione di popolazione: allora una caratteristica richiesta per il pompaggio è $W_{13} > A_{21}$, non sufficiente in quanto la differenza tra i livelli deve essere abbastanza elevata per contrastare le inevitabili perdite d'energia.

Per valutare tale differenza, si può considerare il pompaggio eseguito da un'onda em, viaggiante nel cristallo, confinata da specchi di riflettività r: da ciò si può determinare il rapporto

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 + \frac{2(1-r)}{\alpha_0 l} \tag{8}$$

con l lunghezza tipica del cristallo, α_0 coefficiente di assorbimento per la transizione $1 \to 2$. La potenza P della pompa, lavorante ad un numero n di fotoni incidenti per secondo, è data da $P = nh\nu_p$. Inoltre, con tale pompaggio il rate è dato da $W_{13} = \frac{n\sigma_p}{A}$, con σ_p sezione d'assorbimento $1 \to 3$, A area del cristallo perpendicolare alla radiazione incidente. In tale situazione, alla soglia d'inizio della transizione $W_{13} = A_{21}$, si ha che la densità di flusso richiesta è data da

$$F = \frac{P}{A} = \frac{W_{13}h\nu_p}{\sigma_n} = \frac{A_{12}h\nu_p}{\sigma_n} \tag{9}$$

Si può determinare il rate di transizione W_{13} nel seguente metodo: ipotizzando che la densità di radiazione sia uniformemente distribuita lungo il cristallo, indicando con $\rho(\nu)$ densità di energia e $\sigma(\nu)$ sezione d'urto, si ha

$$W_{13} = \int \frac{c\sigma(\nu)\rho(\nu)}{h\nu_{\nu}\epsilon^{\frac{1}{2}}} d\nu \tag{10}$$

 $\rho(\nu)$, ricavata dalla teoria di radiazione del corpo nero, è data da

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3 \epsilon^{\frac{3}{2}}}{c^3 (e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1)}$$
(11)

Sotto tali condizioni si ricava una temperatura effettiva per le condizioni di inizio del pompaggio $(W_{13} = A_{21})$:

$$T_p = \frac{h\nu_p}{k_b ln[1 + (\frac{A_{31}}{A_{21}})]} \tag{12}$$

Attraverso questa temperatura si può dedurre l'energia richiesta per dare inizio al processo di pompaggio.

4 Determinazione dei rate

In questa sezione si descrivono procedure pratiche per determinare le costanti utilizzate nella sezione precedente per descrivere il modello.

Il rate S_{32} può essere ottenuto irraggiando il cristallo con luce di lunghezza d'onda di 5600 $\overset{\circ}{A}$: con tale irraggiamento si ha assorbimento dal livello $|1\rangle$ al livello $|3\rangle$. Osservando la radiazione riemessa, si distingue il decadimento spontaneo da $|3\rangle$ verso $|1\rangle$ e il decadimento spontaneo da $|3\rangle$ a $|2\rangle$. Le intensità osservate rispettano la relazione $I_{i1} = h\nu_{i1}N_iA_{i1}$. Usando l'approssimazione $S_{21} = A_{21}$, dalla misura dell'intensità e dalla condizione di equilibrio $N_2S_{21} = N_3S_{31}$ si ha $S_{32} = 2 \times 10^7/sec$. Misurando l'efficienza dell'assorbimento (numero di emissioni in rapporto al numero di assorbimenti) si ha un valore molto vicino all'unità: da ciò si può dedurre che $S_{32} >> S_{31}$.