Geometria I

Raccolta di testi e soluzioni (non riviste) dei testi d'esame

un progetto di

www.eigenlab.org

a cura di

Salvatore Baldino
Francesco Cicciarella

Note legali

Liberatoria, mantenimento e segnalazione errori

Questo documento viene pubblicato, in formato elettronico, senza alcuna garanzia di correttezza del suo contenuto. Il testo, nella sua interezza, è opera di

`Salvatore Baldino` `<salvatorebaldino[AT]gmail[DOT]com>`
`Francesco Cicciarella` `<f[DOT]cicciarella[AT]inventati[DOT]org>`

e viene mantenuto dagli stessi, a cui possono essere inviate eventuali segnalazioni di errori.

Pisa, 10 Ottobre 2012

Indice

Capitolo 1

Testi dei compiti

1.1 Compito del 13.01.2004

Esercizio 1
Si considerino, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1-\lambda\\1\\2+\lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2+\lambda\\2\\4+\lambda\end{pmatrix}\right) \qquad W_2 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1-\lambda\\1-\lambda\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\4\end{pmatrix}\right)$$

a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di W_1 e quella di W_2.

b) Dire per quali valori di λ il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ appartiente a $W_1 + W_2$.

Esercizio 2
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3y - z, y - z, 2x + 4z)$$

a) Determinare il nucleo e l'immagine di f.

b) Costruire, se esiste, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di rango 1 tale che $f + g$ sia un isomorfismo di traccia uguale a 2.

Esercizio 3
Data $A \in M(n, \mathbb{R})$, si considerino le seguenti matrici in $M(2n, \mathbb{R})$:

$$B = \begin{pmatrix}A & 0\\0 & A\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}A & A\\0 & A\end{pmatrix}$$

a) Detto r il rango di A, determinare il rango di B e quello di C.

b) Supponiamo che A sia diagonalizzabile. È vero che B è diagonalizzabile? È vero che C è diagonalizzabile?

c) Supponiamo che A sia triangolabile. È vero che B è triangolabile? È vero che C è triangolabile?

Esercizio 4
Sia $< , >$ un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ e sia $V = \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Fissato $v \in \mathbb{R}^k$, $v \neq 0$, si consideri l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da $b(f, g) = \langle f(v), g(v)\rangle$.

a) Verificare che b è un prodotto scalare su V.

b) Determinare la segnatura di b.

1.2 Compito del 03.02.2004

Esercizio 1
Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 1, 1)$.
Determinare tutte le matrici reali 3×3 della forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ che hanno v_1, v_2, v_3 come autovettori.

Esercizio 2
Sia B una matrice reale $n \times n$, con $n \geq 2$, e sia $V_B = \{M \in M(n, \mathbb{R}) \mid MB = BM\}$.

a) Dimostrare che V_B è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{R})$.

b) Dimostrare che $\dim V_B \geq 2$.

c) Determinare $\dim V_B$ nel caso in cui B è la matrice elementare avente l'elemento di posto $(1, 1)$ uguale ad 1 e tutti gli altri elementi nulli.

Esercizio 3
Siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, con $W_1 \neq W_2$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare tale che W_1 e W_2 sono gli unici sottospazi di dimensione 2 f-invarianti.

a) Dimostrare che f è triangolabile.

b) Dimostrare che f non è diagonalizzabile.

c) Dire se è possibile che le restrizioni di f a W_1 e a W_2 siano entrambe diagonalizzabili.

d) Costruire un esempio esplicito di W_1, W_2 e f con le proprietà suddette.

Esercizio 4
Sia V uno spazio vettoriale reale e sia Φ un prodotto scalare su V.
Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Se Φ è semidefinito positivo, allora il radicale di Φ coincide con l'insieme dei vettori isotropi.

b) Se W è un sottospazio vettoriale di V, allora $i_0(\Phi|_W) \leq i_0(\Phi)$.

c) Se Φ è non degenere, allora esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che $\Phi|_W$ è il prodotto scalare nullo e $\dim W \geq \min(i_+(\Phi), i_-(\Phi))$.

1.3 Compito del 3.06.2004

Esercizio 1
Discutere, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = \beta \\ 2x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + y + \alpha z = \beta + 1 \\ x + (\alpha - 1)y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2
Data la matrice $A \in {}_n\mathbb{K}_n$, poniamo $W(A) = \{B \in {}_n\mathbb{K}_n \mid AB = BA\}$.

1. Dimostrare che $W(A)$ è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{K}_n$.
2. Calcolare $\dim W(A)$ quando A è la matrice a blocchi $\begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \mu I_{n-r} \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$ e $1 \leq r \leq n-1$, dove I_m denota la matrice identità di ${}_m\mathbb{K}_m$.
3. Dimostrare che se A è simile ad A' allora $W(A)$ è isomorfo a $W(A')$.
4. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Verificare che A è diagonalizzabile e calcolare $\dim W(A)$.

Esercizio 3
Dato il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi(X, Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y$, sia $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 2z + w = 0\}$ e sia $v = (1, 3, 5, 9)$.

1. Trovare una base $\varphi-$ortonormale di W.
2. Completare la base trovata al punto 1 ad una base $\varphi-$ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
3. Calcolare la proiezione ortogonale di v su W.

Esercizio 4
Sia g un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ e sia $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice simmetrica invertibile. Definiamo il prodotto scalare $\widetilde{g}$ su $\mathbb{R}^n$ tramite la formula $\widetilde{g}\,(X, Y) = g(AX, Y)$.
Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono false o vere, motivando la risposta.

1. g non degenere $\Longrightarrow$ $\widetilde{g}$ non degenere.
2. g definito positivo $\Longrightarrow$ $\widetilde{g}$ definito positivo.
3. g non degenere $\Longrightarrow$ esiste A tale che $\widetilde{g}$ è definito positivo.

1.4 Compito dell'8.07.2004

Esercizio 1
Al variare del parametro reale t, si consideri il sottospazio W_t di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$v_1 = (2,1,0,0,1), v_2 = (0,3,1,1,0), v_3 = (1,1,0,1,0), v_4 = (t-2,2,2t-1,0,1-t)$$

1. Determinare una base di W_t.
2. Trovare un sistema lineare il cui insieme delle soluzioni coincida con W_t.

Esercizio 2
Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che f ha rango k se e solo se esistono due applicazioni lineari $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tali che g è surgettiva, h è iniettiva e $f = h \circ g$.

Esercizio 3
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice reale

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha-2 \\ \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Dire per quali valori del parametro α la matrice A_α è diagonalizzabile.
2. Detto L il sottospazio generato dal vettore $(0,1,1)$, dire per quali valori di α esiste un autospazio W per A_α tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus L$.

Esercizio 4
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare tale che $f^2 = f$. Dimostrare che esiste un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^n$ rispetto al quale f è simmetrica.

1.5 Compito del 15.09.2004

Esercizio 1
Discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni in $\mathbb{C}^4$ del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 2\lambda t = 1 \\ 2x + 2\lambda y - z + 8\lambda t = 5 \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2
Sia B una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e siano $v_1, \ldots, v_{n+1}$ autovettori per B a n a n linearmente indipendenti. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $B = \lambda I$.

Esercizio 3
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e siano U_1, U_2 sottospazi vettoriali distinti di V, $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$. Per ogni $j = 0, 1, 2, 3$ dire se esiste una applicazione lineare $f : V \to V$ che verifichi tutte le condizioni seguenti:

1. $\dim \ker f = j$;
2. $f^3 = f$;
3. $f(U_1 \cap U_2) \neq \{0\}$;
4. $f(U_1) \subseteq U_2$ e $f(U_2) \subseteq U_1$.

Esercizio 4
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice reale

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Determinare, al variare dei α, gli indici di positività, negatività e nullità del prodotto scalare φ_α su $\mathbb{R}^3$ associato ad A_α rispetto alla base canonica.

1.6 Compito del 18.01.2005

Esercizio 1
Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \text{Span}((1,0,0),(0,1,1)), \quad V_2 = \text{Span}((0,1,0),(-1,0,-1))$$

1. Costruire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:
   - $\text{Im}\, f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+t=0, x+y-z=0\}$
   - $f|_{V_1}$ e $f|_{V_2}$ siano iniettive.
2. Calcolare $f(3,2,0)$.

Esercizio 2
Per ogni $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ si consideri il sottoinsieme $W_f = \{g \in \text{End}(\mathbb{R}^n) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

1. Verificare che W_f è un sottospazio di $\text{End}(\mathbb{R}^n)$.
2. Dimostrare che se $f' = h \circ f \circ h^{-1}$ per qualche $h \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, allora $\dim W_f = \dim W_{f'}$.
3. Supponiamo che f sia diagonalizzabile. Dimostrare che $\dim W_f = n$ se e solo se f ha n autovalori distinti.

Esercizio 3
Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare la segnatura di ϕ.
2. Dimostrare che $\phi|_W$ è degenere su ogni sottospazio W di dimensione 3.
3. Dimostrare che, se W è un sottospazio di dimensione 3 e $\phi|_W \equiv 0$, allora il radicale di ϕ è contenuto in W.
4. Dimostrare che esistono esattamente 2 sottospazi W di dimensione 3 per cui $\phi|_W \equiv 0$.

Esercizio 4
Siano A, B due matrici reali simmetriche $n \times n$. Dimostrare che

1. AB è simmetrica se e solo se $AB = BA$.
2. Se AB è simmetrica, allora esiste un autovettore comune per A e B.
3. Se AB è simmetrica, allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare ordinario) formata da autovettori comuni per A e B.

1.7 Compito del 7.02.2005

Esercizio 1

1. Provare che per ogni n dispari non esiste alcuna applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, l'insieme $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

2. Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare. Dimostrare che g ha tre autovalori distinti se e solo se g è diagonalizzabile ed esiste $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ tale che $\{v, g(v), g^2(v)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2
Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Dire se A è diagonalizzabile; se lo è, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori per A.

2. Dire se A è triangolabile; se lo è, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ a bandiera per A.

Esercizio 3

1. Sia V uno spazio vettoriale, W un sottospazio vettoriale di V e ϕ un prodotto scalare su V. Dimostrare che se $W + W^\perp = V$ allora $W \cap W^\perp$ è contenuto nel radicale di ϕ.

2. In $\mathbb{C}^4$ si considerino i seguenti sottospazi

$$U = \text{Span}((1,1,0,0),(0,0,1,1)) \qquad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4 \mid x + y - z - t = 0\}$$

   Calcolare il rango di un qualsiasi prodotto scalare su $\mathbb{C}^4$ tale che $W = U^\perp$ e $U = W^\perp$.

3. Costruire un esempio di un prodotto scalare su $\mathbb{C}^4$ che verifichi le proprietà del punto 2.

Esercizio 4
Si consideri $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare ordinario $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e siano $U \neq \{0\}$, $W \neq \{0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che U e W sono f-invarianti, $f|_U$ è simmetrica rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle|_U$ e $f|_W$ è simmetrica rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W$. È vero che ogni $f \in \mathcal{F}$ è simmetrica? (Motivare la risposta)

1.8 Compito del 16.06.2005

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, W un suo sottospazio proprio e $L : V \to V$ una applicazione lineare.

1. Dimostrare che $\dim L(W) \geq \dim W - \dim \ker L$.
2. Fornire un esempio per cui nella diseguaglianza precedente valga ">" e un esempio per cui valga "=".
3. Se $\dim V = 4$ e $\dim W = 3$, per ogni intero m con $0 \leq m \leq 4$ costruire, se esiste, un endomorfismo L di V tale che $\dim \ker L = 2$ e $\dim L(W) = m$.

Esercizio 2
Sia $L_k : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$L_k(p(t)) = p(0) + p(k)t + p(1)t^2$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, L_k è diagonalizzabile.
2. Detta $G_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

   $$G_k(x, y, z) = 2kx + ky + (y - 2z)t + (kx - y + 3z)t^2$$

   determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

   $$\mathbb{R}_2[t] = \operatorname{Im} G_k \oplus \ker L_k$$

Esercizio 3
Si consideri $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico. Sia F lo spazio vettoriale

$$F = \{A \in {}_n\mathbb{R}_n \mid Av = v^{\perp} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\}$$

Dimostrare che F coincide con l'insieme delle matrici antisimmetriche.

Esercizio 4
Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\phi(X, Y) = {}^tXAY \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per ciascuna terna di interi non negativi (i_+, i_-, i_0) tale che $i_+ + i_- + i_0 = 2$ dire se esiste un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che la restrizione di ϕ ad U abbia come segnatura (i_+, i_-, i_0): se un tale U esiste, costruirne uno; altrimenti provare che non può esistere.

1.9 Compito del 7.07.2005

Esercizio 1
Siano

$$U_\lambda = \mathrm{Span}\left((\lambda-1,-1,\lambda-2),(2+\lambda,2,4+\lambda)\right), \quad W_\lambda = \mathrm{Span}\left((\lambda,\lambda,4),(1-\lambda,1-\lambda,-2)\right)$$

sottospazi di $\mathbb{R}^3$ dipendenti da un parametro reale λ. Sia inoltre $L \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni:

$$\{x-y-2z=0, z+2y=0\}$$

1. Discutere le dimensioni di $U_\lambda + W_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Per quali λ abbiamo $(U_\lambda + W_\lambda) \oplus L = \mathbb{R}^3$?

Esercizio 2
Sia $A \in M(3,3,\mathbb{R})$ una matrice non diagonalizzabile, avente polinomio caratteristico $p_A(x) = (x-1)(x-2)^2$.

1. Dimostrare che A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Dimostrare che esistono esattamente 2 piani in $\mathbb{R}^3$ invarianti per l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3
Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ di dimensioni n e m rispettivamente. Siano inoltre V_1 e V_2 sottospazi di V di dimensione n_1 e n_2 rispettivamente, con $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Sia infine $W_1 \subset W$ un sottospazio di dimensione m_1.
Supponiamo che W sia dotato di un prodotto scalare ϕ definito positivo. Dimostrare che l'insieme

$$\left\{f : V \to W \text{ lineari} \mid f(V_1) \subset W_1, f(V_2) \subset W_1^\perp\right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V,W)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 4
Sia ϕ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che esistano due sottospazi $U, W \subset \mathbb{R}^3$ distinti di dimensione 2, tali che $\phi|_U$ e $\phi|_W$ abbiano entrambi rango 1 e $\phi_{U\cap W}$ sia definito positivo.

1. Dimostrare che ϕ non può avere rango 2.
2. Nei casi in cui ϕ è non degenere, calcolare la segnatura di ϕ.

1.10 Compito del 19.09.2005

Esercizio 1
Discutere, al variare del parametro reale t, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+tz=1 \\ x+y+t^3z=3 \\ 2x+2y+(1+t)z=1x+z=0 \end{cases}$$

Esercizio 2
Siano r, s e t tre rette distinte in $\mathbb{R}^n$ passanti per l'origine e sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare tale che

$$F(r) = s, \qquad F(s) = t, \qquad F(t) = r$$

1. Dimostrare che se $n = 3$ e le tre rette non sono complanari allora F non è diagonalizzabile.
2. È ancora vero che F non è diagonalizzabile se $n = 3$ ma le tre rette sono complanari?
3. È ancora vero che F non è diagonalizzabile se $n > 3$?

Esercizio 3
Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la segnatura di ϕ.
2. Costruire un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non nulla tale che $\phi(X, F(Y)) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$.
3. Dimostrare che l'insieme $\{F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \mid \phi(X, F(Y)) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^4\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 4
Sia ψ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+1 \\ a+2 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro reale $a \in \mathbb{R}$. Dire se esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui ψ è definito positivo o definito negativo.

1.11 Compito del 18.01.2006

Esercizio 1
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha x + (1-\alpha)y - \alpha z = 1 \\ \\ 2y + 3z = \alpha \\ \\ (\alpha - 1)x + (3-\alpha)y + (3+\alpha)z = \alpha + 1 \end{cases}$$

Esercizio 2
Sia $V = {}_n\mathbb{R}_n$ e, dato $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo $F_v : V \to \mathbb{R}^n$ tramite la formula $F_v(A) = Av$ per ogni $A \in V$. Sia $W = \{A \in V : A^t A \in \mathrm{Span}(I)\}$.

1. Verificare che W è un sottospazio di V.
2. Verificare che F_v è lineare per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.
3. Per quali $v \in \mathbb{R}^n$ l'applicazione F_v è surgettiva?
4. Per quali $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ W è isomorfo a $\mathrm{Ker}\,(F_v)$?

Esercizio 3
Sia $V = {}_n\mathbb{R}_n$ e sia φ il prodotto scalare su V dato da $\varphi(B, C) = \mathrm{tr}\,({}^tBC)$ per ogni B e C in V. Fissata $A \in V$, sia $f_A : V \to V$ l'endomorfismo tale che $f_A(X) = AX$ per ogni $X \in V$.

1. Verificare che φ è definito positivo.
2. Provare che $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di $A \iff \lambda$ è autovalore di f_A.
3. Provare che se A è simmetrica allora f_A è φ-autoaggiunta.
4. Per A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinare una base φ-ortornormale di V costituita da autovettori di f_A.

Esercizio 4
Siano $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 2, 3), v_3 = (1, -1, -1), v_4 = (1, 0, 0)$, $U = \{(x, y, z) \in R^3 : z = x + y\}$. Costruire, se esiste, un prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Span}(v_1, v_2)^\perp = U$, v_3 è ortogonale a v_4 e $\Phi(v_1, v_1) = 4$. Tale prodotto scalare è unico?

1.12 Compito del 7.02.2006

Esercizio 1

Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Sia $f : {}_2\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f(A) = (\operatorname{tr} A, \operatorname{tr}(AB)) \qquad \forall A \in {}_2\mathbb{R}_2$$

1. Determinare una base di $\ker f$.
2. Determinare una base di $S(2) \cap \ker f$, dove $S(2)$ è il sottospazio di ${}_2\mathbb{R}_2$ delle matrici simmetriche.
3. Costruire una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ tale che l'endomorfismo $g \circ f : {}_2\mathbb{R}_2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ abbia autovalori $0, 1, 2$.

Esercizio 2

Siano V, W e Z tre spazi vettoriali reali di dimensioni rispettivamente m, n e p.

1. Dire per quali m, n e p esistono due applicazioni lineari $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ tali che $g \circ f$ è iniettiva.
2. Dire per quali m, n e p esistono due applicazioni lineari $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ tali che $g \circ f$ è surgettiva.

Esercizio 3

Consideriamo le due matrici simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Siano ϕ e ψ i prodotti scalari su $\mathbb{R}^3$ dati da

$$\phi(X, Y) = {}^t XAY, \qquad \psi(X, Y) = {}^t XBY \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3$$

1. Calcolare le segnature di ϕ e ψ.
2. Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale per ϕ e ortogonale per ψ.

1.13 Compito del 17.01.2007

Esercizio 1
Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0, 2x - y + 3z - t = 0, -x + 8y - 9z + 5t = 0\}$$

Dire per quali valori del parametro reale h coincide con l'insieme delle soluzioni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ del sistema lineare

$$\begin{cases} (2+h)x + (2h-1)y + (3-h)z + 2ht = 0 \\ x + 2y - h^2 z - ht = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Supponiamo che esista un intero k_0 con $0 < k_0 < n$ tale che tutti i sottospazi di V di dimensione k_0 sono $f-$invarianti. Mostrare che tutti i sottospazi di V sono f-invarianti (indipendentemente dalla loro dimensione).

Esercizio 3
Sia ${}_2\mathbb{R}_2$ lo spazio delle matrici 2×2 reali e W il sottospazio

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Costruire un endomorfismo $f : {}_2\mathbb{R}_2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ che verifichi tutte le seguenti condizioni:

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore per f.
2. $f(W) = W$.
3. f non sia diagonalizzabile.
4. f abbia rango 3.
5. $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Siano W_1 e W_2 due sottospazi di V tali che $V = W_1 + W_2$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due prodotti scalari, rispettivamente su W_1 e W_2, tali che $\phi_1|_{W_1 \cap W_2} = \phi_2|_{W_1 \cap W_2}$.

1. Mostrare che esiste un prodotto scalare ϕ su V le cui restrizioni su W_1 e W_2 coincidono rispettivamente con ϕ_1 e ϕ_2.
2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supponiamo che ϕ_1 sia definito positivo e che ϕ_2 sia non degenere con indice di positività $i_+(\phi_2)$ uguale a $\dim(W_1 \cap W_2)$. Sia ϕ un prodotto scalare su V che estende ϕ_1 e ϕ_2 (nel senso del punto 1). Calcolare la segnatura di ϕ.

1.14 Compito del 6.02.2007

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f : V \to V$ un endomorfismo tale che $\dim(\operatorname{Im} f^2) = n - 1$.

1. Dimostrare che $\dim(\operatorname{Im} f) = n - 1$.
2. Dimostrare che $\dim(\ker f^k) = 1$ per ogni intero $k \geq 1$.

Esercizio 2
Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $f_a(v) = M_a v$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ f_a è diagonalizzabile.
2. Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ a bandiera per f_1.

Esercizio 3
Si consideri il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da $\phi(X, Y) = {}^t X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$.
Al variare di $v \in \mathbb{R}^3$, si determini la segnatura (i_+, i_-, i_0) di $\phi_{\operatorname{Span}(v)^\perp}$.

Esercizio 4
Per ciascuna delle seguenti asserzioni, dire se è vera o falsa motivando la risposta.

1. Se una matrice quadrata A è simile ad una matrice triangolare superiore ed è simile ad una matrice triangolare inferiore , allora A è diagonalizzabile.
2. Se una matrice quadrata A è simile ad una matrice triangolare superiore, allora A è anche simile ad una matrice triangolare inferiore.
3. Sia V uno spazio vettoriale. Sia E il sottoinsieme di $\operatorname{Hom}(V, V)$ definito nel modo seguente:

   $$E = \{f : V \to V \mid \mu_f(0) = 0\},$$

   dove μ_f è il polinomio minimo di f. Allora E è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}(V, V)$.

1.15 Compito dell'11.06.2007

Esercizio 1
Sia B una matrice $n \times n$ reale antisimmetrica non nulla. Si consideri l'insieme

$$V = \{A \in {}_n\mathbb{R}_n \mid A - {}^tA \in \mathrm{Span}(B)\}.$$

1. Provare che V è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{R}_n$.
2. Provare che $\dim V = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale e U, W sottospazi tali che $V = U + W$. Sia f un endomorfismo di V tale che $f(U) \subseteq U$ e $f(W) \subseteq W$.

1. Provare che, se f è triangolabile, allora anche $f|_U : U \to U$ e $f|_W : W \to W$ lo sono.
2. Sia $\mathcal{S}$ una base di U a bandiera per $f|_U$. Provare che, se f è triangolabile, esiste una base $\mathcal{T}$ di V a bandiera per f che completa $\mathcal{S}$.
3. Provare che, se f è triangolabile e $\mathcal{G}$ è una base di $U \cap W$ a bandiera per $f|_{U\cap W}$, esiste una base $\mathcal{B}$ di V a bandiera per f che completa $\mathcal{G}$.

Esercizio 3
Siano $v_1 = (1,0,0), v_2 = (-1,1,0), v_3 = (0,1,1)$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Indichiamo inoltre con e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste un prodotto scalare ϕ_λ su $\mathbb{R}^3$ tale che
   - v_1 e v_2 sono isotropi,
   - $\phi_\lambda(v_3, v_3) = 2$,
   - $\phi_\lambda(e_2, e_3) = 1$,
   - $\phi_\lambda(e_1, 2e_2 - e_3) = 2$,
   - $\phi_\lambda(e_2 - e_1, e_3 + \lambda e_2) = 1$.
2. Esiste un valore $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui ϕ_λ è semidefinito positivo?

1.16 Compito del 2.07.2007

Esercizio 1
Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$ e, per $t \in \mathbb{R}$, si considerino i seguenti sottospazi di V:

$$
\begin{aligned}
W_t &= \left\{ A \in V \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \in \ker A \right\} \\
U &= \left\{ A \in V \,\middle|\, \operatorname{tr} A = 0, \operatorname{tr}\left(A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

1. Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $f : V \to V$ con $f(U) = W_t$ e $f(W_t) = U$?
2. Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $f : V \to V$ con $f(U) \subseteq U$ e $f(W_t) \subseteq W_t$ tale che $f|_U$ e $f|_{W_t}$ siano diagonalizzabili e f non lo sia?
3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $f : V \to V$ con $f(U) \subseteq U$ e $f(W_t) \subseteq W_t$, tale che $f|_U$ e $f|_{W_t}$ siano triangolabili e f non lo sia?

Esercizio 2
Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da $\phi(X, Y) = {}^tXAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$, dove

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

1. Calcolare la segnatura di ϕ.
2. Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ composta da vettori isotropi.
3. Trovare, se esiste, un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $\phi|_W$ è nullo.

Esercizio 3
Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se è vera o falsa, motivando la risposta.

1. L'insieme $\{A \in {}_n\mathbb{R}_n \mid \text{il polinomio minimo di } A \text{ divide } t^2 + t\}$ è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{R}_n$.
2. Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili.
3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e ϕ un prodotto scalare non degenere su V. ϕ non ha vettori isotropi se e solo se $\dim V = 1$.

1.17 Compito del 13.09.2007

Esercizio 1
Sia
$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2k-1 & 0 & -k \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ k-1 & k^2-1 & 2 & -k \\ k & 2k+1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$
dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice reale A_k è diagonalizzabile.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale complesso e siano $f, g : V \to V$ due applicazioni lineari. Si supponga che f sia nilpotente e che $fg - gf = f$.

1. Provare che $\ker f$ è invariante per g.

2. Provare che esiste un autovettore comune v_0 ad f e g.

3. Sia W un sottospazio di V tale che $V = \mathrm{Span}(v_0) \oplus W$ e sia $p_W : V \to W$ la proiezione indotta dalla somma diretta. Se $f' = p_W \circ f|_W$, $g' = p_W \circ g|_W$, provare che
$$f'g' - g'f' = f'$$

4. Provare che esiste una base a bandiera comune ad f e g.

Esercizio 3
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare ortogonale. Dimostrare che esistono due piani distinti passanti per l'origine invarianti per f se e soltanto se f è diagonalizzabile.

1.18 Compito del 16.01.2008

Esercizio 1
Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si considerino in $\mathbb{R}^2$ le seguenti rette

$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \quad r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

$$r_3 = \mathrm{Span}\{(1, b)\} \quad r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax - y = 0\}$$

$$s_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \quad s_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$

$$s_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\} \quad s_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x\}$$

1. Provare che per ogni $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(r_i) = s_i$ per $i = 1, 2, 3$.
2. Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, per cui esiste una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(r_i) = s_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 2
Per ogni coppia di matrici $A, B \in {}_n\mathbb{R}_n$ si consideri il sottoinsieme

$$E = \{X \in {}_n\mathbb{R}_n \mid AX = B\}$$

1. Provare che E è non vuoto se e solo se $\mathrm{Im}\, A \supseteq \mathrm{Im}\, B$.
2. Determinare le coppie (A, B) per cui l'insieme E è un sottospazio vettoriale di ${}_n\mathbb{R}_n$ e, in tal caso, calcolarne la dimensione.

Esercizio 3
Per ogni numero naturale k, si consideri la matrice di ${}_{2k}\mathbb{R}_{2k}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e sia I la matrice identità di ordine $2k$.

1. Provare, per induzione su k, che $\det(aI + bJ) = (a^2 - b^2)^k$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Provare che J è diagonalizzabile e determinare una base di $\mathbb{R}^{2k}$ di autovettori per J.

Esercizio 4
Al variare del parametro reale a, si consideri su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare ϕ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare ϕ è degenere.
2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare il radicale di ϕ.
3. Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare la segnatura di ϕ.

1.19 Compito del 6.02.2008

Esercizio 1
Si consideri la matrice di ${}_4\mathbb{R}_4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & h+1 & 0 \\ -1 & -h-1 & h+1 & 1 \\ 1-h & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

1. Si determinino i valori del parametro reale h per cui A è diagonalizzabile.
2. Per $h = 0$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di A o almeno, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ con bandiera A-invariante.

Esercizio 2
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Siano W_1,W_2 sottospazi vettoriali di V invarianti per f.

1. Provare che se $f|_{W_1}$ e f_{W_2} sono diagonalizzabili e $W_1 + W_2 = V$, allora f è diagonalizzabile.
2. È vero che se f è diagonalizzabile, allora $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ sono diagonalizzabili e $W_1 + W_2 = V$?
3. È vero che se $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ sono diagonalizzabili, allora f è diagonalizzabile?

Esercizio 3

1. Sia $D \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice diagonale definita positiva. Provare che esiste una matrice diagonale $F \in {}_n\mathbb{R}_n$ tale che $F^2 = D$.
2. Sia $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice simmetrica definita positiva. Provare che esiste una matrice simmetrica definita positiva $S \in {}_n\mathbb{R}_n$ tale che $S^2 = A$.
3. Sia $M \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice invertibile. Provare che ${}^tMM$ è simmetrica e definita positiva.
4. Sia $M \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice invertibile. Provare che esistono una matrice ortogonale $P \in O(n)$ e una matrice simmetrica definita positiva S tali che $M = PS$.

1.20 Compito del 12.06.2008

Esercizio 1
Siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V, con $\dim W_1 = \dim W_2 = k$, tali che $V = W_1 \oplus W_2$. Sia $f : W_1 \to W_2$ una applicazione lineare e sia $Z = \{v + f(v) \mid v \in W_1\}$.

1. Verificare che Z è un sottospazio vettoriale di V e calcolarne la dimensione.
2. Provare che $W_2 \cap Z = \{0\}$.
3. Provare che, se f è iniettiva, allora $W_1 \cap Z = \{0\}$.
4. Se $\dim \operatorname{Im} f = r$, calcolare la dimensione di $W_1 \cap Z$.

Esercizio 2
Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $f : V \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare non nulla. Al variare di w in V, si consideri l'applicazione $g_w : V \to V$ definita da $g_w(v) = f(v)w + 2v$.

1. Verificare che g_w è lineare per ogni $w \in V$.
2. Provare che g_w è triangolabile per ogni $w \in V$.
3. Trovare condizioni necessarie e sufficienti su w affinché g_w sia diagonalizzabile.
4. Nei casi in cui g_w non è diagonalizzabile, calcolarne il polinomio minimo.

Esercizio 3
Costruire, se esiste, un prodotto scalare non degenere b su $\mathbb{R}^4$ tale che:

1. L'indice di negatività di b sia 1.
2. Il vettore $z = (1, 2, -1, 0)$ sia isotropo.
3. La restrizione di b all'ortogonale (rispetto a b) del sottospazio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0, y + t = 0\}$$

   sia definita positiva.

1.21 Compito dell'8.07.2008

Esercizio 1
Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita e siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di W tali che $W = W_1 \oplus W_2$. Siano $f : V \to W_1$ e $g : V \to W_2$ applicazioni lineari e si consideri l'applicazione $L : V \to W$ definita da $L(v) = f(v) + g(v)$ per ogni $v \in V$.

1. Verificare che L è lineare.
2. Verificare che $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
3. Verificare che $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ se e solo se $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = V$.

Esercizio 2
Costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e avente $p(t) = t^3(t-2)$ come polinomio caratteristico.
Calcolare inoltre $\dim \operatorname{Ker} f^2$ e $\dim \operatorname{Ker} (f - 2id)^2$.

Esercizio 3
Sia b il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Fissati i vettori $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (2, \lambda)$ di $\mathbb{R}^2$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $\phi : \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \times \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\phi(f, g) = b(f(v_1), g(v_1)) + b(f(v_2), g(v_2)), \qquad \forall f, g \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

1. Verificare che ϕ è un prodotto scalare.
2. Calcolare il rango di ϕ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Per i valori di λ per cui ϕ è non degenere, verificare che ϕ non è definito positivo né negativo e calcolarne la segnatura.

Esercizio 4
Si considerino le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se le matrici A e B sono equivalenti destra-sinistra, se sono simili e se sono congruenti.

1.22 Compito del 17.09.2008

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale a dimensione finita e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di dimensione k. Sia $A = \{f : V \to V \mid f \text{ è lineare e } \operatorname{Ker} f \supset W\}$, $B = \{f : V \to V \mid f \text{ è lineare e } \operatorname{Im} f \subset W\}$, $C = \{f : V \to V \mid f \text{ è lineare e } f(W) \subset W\}$.

a) Verificare che A, B sono sottospazi di $\operatorname{End}(V)$ e calcolarne la dimensione.

b) Provare che $A + B = C$.

c) Dire per quali k si ha $C = A \oplus B$.

Esercizio 2
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia A_α la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Discutere la diagonalizzabilità di A_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Per $\alpha = 1$ trovare, se esiste, una base di autovettori di A_1 oppure, se esiste, una base a bandiera per A_1.

Esercizio 3
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Indichiamo con $I(V)$ l'insieme dei prodotti scalari su V per cui esiste una base di V composta da vettori isotropi.

a) Provare che $b \in I(V) \Rightarrow \operatorname{rk} b \neq 1$.

b) Provare che se $b \in I(V)$ è semidefinito allora $b = 0$.

c) Nel caso $n = 2$, dire se $I(V)$ è un sottospazio dello spazio vettoriale dei prodotti scalari su V.

d) Nel caso $n = 3$ esibire, se esiste, $b \in I(V)$ che sia non degenere.

1.23 Compito del 14.01.2009

Esercizio 1
Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia W un sottospazio vettoriale di V di dimensione p≥1. Sia

$$E = \{f \in End(V) | \exists \lambda \in K | W \subseteq V(\lambda, f)\}$$

dove $V(\lambda,f)$ denota l'autospazio di V per f relativo all'autovalore λ. Dire se E è un sottospazio vettoriale di V e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

Esercizio 2
Al variare del parametro reale h, si consideri l'applicazione lineare f_h:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_h = (hx + hy + 2hz, -hx - 3z, hx + hy + 2z, 2hx + 2hy + (2 + 2h)z)$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori (1,-1,1,0) e (-1,-2,1,2).

1. Determinare equazioni cartesiane per W.
2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di Im f_h.
3. Dire per quali valori di h si ha Im $f_h \subseteq W$.
4. Dire per quali valori di h si ha dim(Im $f_h \cap$ Im f_2) = 1.

Esercizio 3
Al variare del parametro reale k si considerino le matrici di $M(3, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ -k & k & k+1 \end{pmatrix}$$

1. Dire se A è diagonalizzabile e determinare equazioni cartesiane per i suoi autospazi.
2. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori sia per A che per B_k.

Esercizio 4
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare Φ definito positivo e sia f un endomorfismo simmetrico di V (rispetto a Φ). Provare che, per ogni intero r con $1 \leq r \leq n$, esiste un endomorfismo simmetrico g di V tale che $f + g$ è simmetrico e rk $(f + g) = r$.

1.24 Compito del 05.02.2009

Esercizio 1
In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}, \qquad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0\}$$

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$$

(a) Costruire un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(V) = V, f(W) = Z$ e $f(Z) = W$.

(b) Dire se l'endomorfismo f costruito al punto (a) è diagonalizzabile.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia W un sottospazio vettoriale di V di dimensione k. Sia ϕ un prodotto scalare non degenere su V e sia

$$E = \{f \in \text{End}(V) \mid \phi(f(x), y) = \phi(x, f(y)) \quad \forall x, y \in V\}$$

1. Verificare che E è un sottospazio vettoriale di $\text{End}(V)$ e calcolarne la dimensione.
2. Nel caso in cui ϕ è definito positivo, si calcoli la dimensione del sottospazio vettoriale

$$G = \{f \in E \mid f(W) \subseteq W\}$$

Esercizio 3
Su $\mathbb{R}^4$ si consideri il prodotto scalare ϕ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Si determinino tutte le segnature di $\phi|_W$ al variare di W tra i sottospazi 3-dimensionali di $\mathbb{R}^4$ (se una segnatura è possibile, esibire un sottospazio W che la realizza; se non è possibile, dimostrarlo).

1.25 Compito del 10.06.2009

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale, $f : V \to V$ un endomorfismo e siano h, k due numeri interi positivi.

a) Provare che $\operatorname{Ker} f^h \cap \operatorname{Im} f^k = f^k(\operatorname{Ker} f^{h+k})$.

b) Provare che, se $f^k(\operatorname{Ker} f^{h+k}) = \{0\}$ e $h \geq k$, allora $V : \operatorname{Ker} f^h \oplus \operatorname{Im} f^k$.

c) Esibire un esempio di un endomorfismo f di V in cui

$$\dim V = 4, \quad \dim \operatorname{Ker} f = 1 \quad \text{e} \quad V = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2$$

Esercizio 2
Si considerino le seguenti matrici in $M(4, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle precedenti matrici sono simili e quali non lo sono, motivando adeguatamente la risposta.

Esercizio 3
Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grando $\leq k$. Se A è una matrice in $M(n, \mathbb{R})$ e $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 \in V$, poniamo $p(A) = a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$ dove I_n denota la matrice identica in $M(n, \mathbb{R})$.
Per ogni $A \in M(n, \mathbb{R})$ si consideri l'applicazione $\psi_A : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\psi_A(p, q) = \operatorname{tr}(p(A)q(A)) \quad \forall p, q \in V$$

dove tr denota l'applicazione traccia.

a) Verificare che ψ_A è un prodotto scalare su V.

b) Verificare che, se $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ sono matrici simili, allora $\psi_A = \psi_B$.

c) Provare che, se A ha n autovalori distinti e $n > k$, allora ψ_A è definito positivo.

1.26 Compito del 07.07.2009

Esercizio 1
Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori per A o, qualora ciò non fosse possibile, una base di $\mathbb{R}^4$ a bandiera per A.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare φ non degenere; sia $f : V \to V$ una applicazione tale che ψ_f è un prodotto scalare, dove $\psi_f : V \times V \to \mathbb{K}$ è definita da $\psi_f(v, w) = \varphi(v, f(w))$ per ogni $v, w \in V$.

1. Provare che f è lineare e che, se φ è definito positivo, allora f è un'applicazione simmetrica (rispetto a φ).
2. Provare che f è iniettiva se e solo se ψ_f è non degenere.
3. Dimostrare che non esistono o costruire, se esistono, φ e f tali che il rango di f sia 1 e il rango di ψ_f sia 2.
4. Nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e φ è il prodotto scalare standard, dimostrare che non esiste o costruire, se esiste, f tale che l'ortogonale rispetto a ψ_f del sottospazio $\mathrm{Span}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ sia il sottospazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0\}$.

Esercizio 3
Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa motivando la risposta.

1. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita e $f : V \to W$ lineare. Sia $Z \subseteq V$ un sottospazio. Allora $\dim f(Z) \geq \dim Z - \dim \mathrm{Ker}\, f$.
2. Siano F, G, H spazi vettoriali di dimensione finita e $f : F \to G$, $h : H \to G$ lineari. Allora esiste $L : H \to F$ lineare tale che $h = f \circ L$ se e solo se $\mathrm{Im}\, h \subseteq \mathrm{Im}\, f$.
3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione maggiore o uguale a 2. Allora l'insieme $E = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \circ f = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$.

1.27 Compito dell'8.02.2010

Esercizio 1
Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $L_a : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definita da

$$L_a((p(x)) = x^3 p\left(\frac{a}{x}\right) \qquad \forall p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$$

1. Verificare L_a è lineare.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo L_a è diagonalizzabile.
3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ il sottospazio vettoriale $W = \mathrm{Span}(1 - x^2, x - x^3) \subset \mathbb{R}_3[x]$ è L_a-invariante.

Esercizio 2
Sia $F = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid A^2 = I\}$.

1. Dire se F è un sottospazio vettoriale di $M(2,\mathbb{R})$.
2. Dire quante sono le classi di equivalenza distinte rispetto alla relazione di SD-equivalenza su F.
3. Dire quante sono le classi di equivalenza distinte rispetto alla relazione di similitudine su F.
4. Se $S(2) = \{B \in M(2,\mathbb{R}) \mid {}^tB = B\}$, dire quante sono le classi di equivalenza distinte rispetto alla relazione di congruenza per $F \cap S(2)$.

Esercizio 3
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4.

1. Sia W un sottospazio vettoriale di V di dimensione 3 e sia ψ un prodotto scalare su V di rango 3. Provare che
$$\dim(W^\perp) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V^\perp \not\subseteq W$$
2. Fissati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y = 0, y-z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0\}$, costruire un prodotto scalare ψ su $\mathbb{R}^4$ tale che
$$i_+(\psi) = 2, \quad i_-(\psi) = 1 \quad \text{e} \quad W^\perp = H$$
(dove $i_+(\psi)$ e $i_-(\psi)$ denotano rispettivamente l'indice di positività e l'indice di negatività di ψ).

1.28 Compito del 7.06.2010

Esercizio 1
Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$ e sia $H = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Verificare che H è un sottospazio vettoriale di $M(2, \mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.
2. Costruire un endomorfismo $f : M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R})$ tale che:
    - $\operatorname{rk} f = 2$
    - H è un autospazio per f
    - $f \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$
    - f non è diagonalizzabile.

Esercizio 2
Sia $M \in M(3, \mathbb{R})$ una matrice tale che ${}^tM = M$ e siano $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ gli autovalori di M. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $b_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare associato alla matrice $M - \lambda \mathrm{Id}$.

1. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare l'indice di nullità $i_0(b_\lambda)$ di b_λ.
2. Dire per quali $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che b_λ abbia segnatura $(p, 3 - p, 0)$.

Esercizio 3
Per ognuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa, motivando la risposta.

1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $b : V \times V \to \mathbb{R}$ e $c : V \times V \to \mathbb{R}$ due prodotti scalari tali che:
    - b è definito positivo.
    - per ogni $v, w \in V$ si ha $b(v, w) = 0$ se e solo se $c(v, w) = 0$.

    Allora c è definito positivo oppure è definito negativo.
2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo tale che per ogni base $\mathcal{B}$ di V la matrice $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$ associata a f nella base $\mathcal{B}$ è triangolare superiore. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f = \lambda \mathrm{Id}$.
3. Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$.

1.29 Compito del 5.07.2010

Esercizio 1

1. Sia $Z = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0, x - z - 2t = 0\}$. Costruire un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $Z = \operatorname{Im} f$ e $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo di rango p tale che $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$:

   (a) mostrare che esiste un sottospazio W di V tale che $\dim W = p$ e per ogni intero $k > 0$ l'applicazione lineare $f^k|_W$ è iniettiva;

   (b) determinare per quali r esiste un sottospazio Z di V di dimensione r tale che per ogni intero $k > 0$ l'applicazione lineare $f^k|_Z$ è iniettiva.

Esercizio 2
Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha - 3 & 3 - \alpha \\ 0 & 2 & 3 - \alpha & \alpha - 3 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 & \alpha - 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & \alpha + 2 \end{pmatrix}$$

1. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Dire per quali valori di α la matrice A_α è congruente ad una matrice diagonale.

Esercizio 3
Sia $S \in M(2, \mathbb{R})$ una matrice reale tale che ${}^tS = S$ e sia $b_S : M(2, \mathbb{R}) \times M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita da $b_S(X, Y) = \operatorname{tr}({}^tXSY)$.

1. Verificare che b_S è un prodotto scalare;

2. Fissata $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, determinare una base ortogonale A_1, A_2, A_3, A_4 di $M(2, \mathbb{R})$ tale che $\operatorname{Span}(A_1, A_2)$ sia il sottospazio delle matrici diagonali.

1.30 Compito del 3.02.2011

Esercizio 1
Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0\} \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 6y + 2z + 2t = 0\}$$

Si dica, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che verifica le seguenti condizioni:

1. $\operatorname{Ker} f = U \cap V$.
2. $f(1, 0, 0, 0) = (3, 6, \alpha, 2)$.
3. $f(1, -1, -1, 1) \in V^{\perp}$, considerando $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard.

Esercizio 2
Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tali che $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$ e $f^2 = Id$.

1. Si provi che esiste una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice associata ad f è la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

   dove I_2 denota la matrice identica di ordine 2.
2. Si calcoli il polinomio caratteristico di A.
3. Si provi che esistono due sottospazi vettoriali distinti L_1, L_2 di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2, che sono f-invarianti.
4. Si dica se esiste una base $\mathcal{S}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice associata ad f è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3
Si consideri lo spazio vettoriale reale

$$V = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}[x] \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, 3\}$$

dei polinomi a coefficienti reali di grado al più tre. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$b(p(x), q(x)) = (a_1 + a_3)(b_0 + b_2) + (a_0 + a_2)(b_1 + b_3)$$

dove $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$.

1. Si calcoli una base del radicale di (V, b).
2. Si calcolino gli indici di positività e di negatività della restrizione di b al sottospazio vettoriale

$$W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0\}$$

1.31 Compito del 24.02.2011

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e siano H e L due sottospazi vettoriali di V tali che $\dim H = \dim L = 2$ e $\dim(H + L) = 3$. Si verifichi che

$$E = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f(H) \subseteq H, f(L) \subseteq L\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 2
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-k & 1-k & 2-2k \\ k & k & 2k \end{pmatrix}$$

1. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A è diagonalizzabile.
2. Si determini una base di ciascun autospazio della matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Si scelga un valore di k per cui A è triangolabile ma non diagonalizzabile e si calcoli, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ a bandiera sia per A che per B.

Esercizio 3
Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale V. Sia f un endomorfismo diagonalizzabile di V tale che $f(W) \subseteq W$.

1. Si dimostri che $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile.
2. Si dimostri che esiste un prodotto scalare definito positivo su V tale che $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$.

1.32 Compito del 15.06.2011

Esercizio 1
Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, k, k^2), \quad v_3 = (k, k^2, k)$$

Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste un'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_3)$, $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e Φ un prodotto scalare su V di segnatura $(h, k, 0)$.

1. Si verifichi che
$$E = \{f \in \operatorname{End}(V) \mid \Phi(f(v), w) = \Phi(v, f(w)), \forall v, w \in V\}$$
è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

2. Fissato $V = \mathbb{R}^3$ e $(h, k, 0) = (2, 1, 0)$, si dica se ogni $f \in E$ è diagonalizzabile.

Esercizio 3
Si dica, motivando adeguatamente la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Posti $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ esiste un prodotto scalare non degenere
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$
tale che $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

2. Posti $u_1 = (0, 1, 1)$ e $u_2 = (2, 0, -1)$ esiste un prodotto scalare non degenere
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
tale che $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

3. Posti $w_1 = (1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1)$ esiste un prodotto scalare
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
di segnatura $(1, 1, 1)$ tale che $\langle w_1, w_1 \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0$.

1.33 Compito dell'8.07.2011

Esercizio 1
Si consideri la matrice di $M(3,\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} k+3 & k & 2k-2 \\ -k & 3-k & 1-k \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui A è congruente alla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & h \\ 2 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2
Sia Φ il prodotto scalare sullo spazio vettoriale $V = M(2,\mathbb{R}$ definito da

$$\Phi(X,Y) = \mathrm{tr}\,({}^tXY) \qquad \forall X, Y \in V$$

Per ogni matrice simmetrica $P \in V$ si consideri l'endomorfismo $f_P : V \to V$ dato da

$$f_P(X) = PX \qquad \forall X \in V$$

1. Si verifichi che Φ è definito positivo.
2. Si verifichi che l'endomorfismo f_P è simmetrico rispetto a Φ.
3. Fissata $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, si calcoli una base di V ortonormale rispetto a Φ costituita da autovettori per f_P.

Esercizio 3
Si dica, giustificando adeguatamente la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Se tre vettori $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono a due a due linearmente indipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.
2. Sia V uno spazio vettoriale reale e Φ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di V e sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Se $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di V, allora f è una isometria, ossia $\Phi(f(v), w) = \Phi(v, f(w)), \forall v, w \in V$.
3. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Se esiste una base di V a bandiera sia per f che per g, allora $f \circ g = g \circ f$.

1.34 Compito del 5.09.2011

Esercizio 1
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare iniettiva e sia $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare surgettiva. Si verifichi che

$$E = \{h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \mid g \circ h \circ f = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 2
Si consideri, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice reale simmetrica:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda+2 \end{pmatrix}$$

Sia $\Phi_\lambda : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\Phi_\lambda(X, Y) = {}^t X A_\lambda Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^4$$

1. Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $i(\Phi_\lambda|_W) = (1, 1, 0)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e si determini $W^\perp$.
2. Si determini la segnatura di Φ_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\Phi_\lambda|_U$ sia definito negativo $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia V uno spazio vettoriale e siano W_1, W_2, W_3 tre sottospazi vettoriali di V di dimensione rispettivamente n_1, n_2, n_3 tali che $W_i \cap W_j = \{0\}$ per ogni $i \neq j$. Allora
$$\dim(W_1 + W_2 + W_3) = n_1 + n_2 + n_3$$
2. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici diagonalizzabili. Allora $A + B$ è diagonalizzabile.
3. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici diagonalizzabili tali che $AB = BA$. Allora $A + B$ è diagonalizzabile.
4. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici diagonalizzabili. Allora la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R})$ è diagonalizzabile.

1.35 Compito del 20.09.2011

Esercizio 1
Siano $V = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$. Sia

$$G = \{f \in \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}^3) \mid f\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (0,2,2), f\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (1,-1,1), W \subseteq \mathrm{Im}\, f\}$$

1. Si provi che G non è vuoto.
2. Si dica se esiste $f \in G$ non iniettiva.
3. Si dica se esiste $f \in G$ tale che $f\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix} = (1,2,3)$.

Esercizio 2
Si consideri, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice

$$M_h = \begin{pmatrix}-h+1 & 0 & 0 & -h\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ -h-1 & 0 & 2 & -h\\ h & 0 & 0 & h+1\end{pmatrix}$$

1. Per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice M_h è diagonalizzabile?
2. Si determini l'insieme dei numeri reali b per cui la matrice

$$N_b = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & b\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

   è simile alla matrice M_0.

Esercizio 3
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia Φ un prodotto scalare non degenere su uno spazio vettoriale V di dimensione n. Sia $k \leq n$ e $v_1, \ldots, v_k$ vettori non nulli di V tali che $v_i \neq v_j$ per ogni $i \neq j$. Se $\Phi(v_i, v_j) = 0$ per ogni $i \neq j$, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.
2. Sia Φ un prodotto scalare non degenere su $\mathbb{C}^{2n}$. Allora esiste una base di $\mathbb{C}^{2n}$ rispetto a cui Φ è rappresentato dalla matrice $2n \times 2n$ diagonale a blocchi

$$\begin{pmatrix}H & & \\ & \ddots & \\ & & H\end{pmatrix}$$

   dove $H = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
3. Sia Φ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V. Allora la dimensione del sottospazio generato dai vettori isotropi coincide con l'indice di nullità di Φ.
4. Sia (V, Φ) uno spazio euclideo e $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora f è un endomorfismo simmetrico se e solo se f è diagonalizzabile.

1.36 Compito del 10.01.2012

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Sia W un sottospazio vettoriale di V di dimensione $n-2$ e sia $\{w_1, \ldots, w_{n-2}\}$ una base di W. Siano z_1, z_2 vettori di V linearmente indipendenti tali che $z_1 \notin W$ e $z_2 \notin W$. Allora $\{z_1, z_2, w_1, \ldots, w_{n-2}\}$ è una base di V.

2. Siano A, B due matrici di $M(n, \mathbb{R})$ tali che $A^2 = A$ e $B^2 = B$. Allora A e B sono simili se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia Φ un prodotto scalare su V. Allora l'insieme $E = \{f \in \operatorname{End}(V) \mid \Phi(x, f(y)) = 0, \forall x, y \in V\}$ è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(V)$.

4. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia f un endomorfismo non nullo di V. Allora esiste un prodotto scalare su V definito positivo Φ tale che $\Phi(v, w) = \Phi(f(v), f(w)) \quad \forall v, w \in V$.

Esercizio 2
Al variare di $b \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f_b(X) = M_b(X)$ dove

$$M_b = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b+1 & b \\ 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{pmatrix}$$

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(0, -1, 2, 0), (1, 0, 4, 2)$.

1. Si determinino equazioni cartesiane per W.

2. Si determinino i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Ker} f_b$ è isomorfo a
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, y - z = 0\}.$$

3. Si determinino i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Im} f_b \subseteq W$.

4. Data $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare surgettiva, si determinino i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $g \circ f_b = 0$.

Esercizio 3
Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$.

1. Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) e costituita da autovettori per A.

2. Si determinino i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui A è congruente alla matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 - 3\beta & 0 \\ \beta^2 - 3\beta & 2 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}$.

1.37 Compito del 30.01.2012

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Sia Φ un prodotto scalare su V di segnatura $(2,1,0)$. Allora esiste un sottospazio vettoriale W di V di dimensione 2 tale che la segnatura di $\Phi|_W$ è $(0,1,1)$.
2. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$. Se tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 sono f-invarianti, allora esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $f = b \cdot Id$.
3. Sia Φ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ di segnatura $(1, i_-, i_0)$, con $i_- > 0$. Allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da vettori isotropi.
4. Sia $S(2) = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$. Allora l'insieme
$$W = \{f \in \mathrm{End}(M(2,\mathbb{R})) \mid \dim \mathrm{Im}\, f \leq 2, \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid S(2) \subseteq V(\lambda, f)\}$$
è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(M(2,\mathbb{R}))$ di dimensione 3.

Esercizio 2
Al variare del parametro reale h si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da
$$f_h(x,y,z) = (y+z, y+hz, 2x-3y-z, x-2y-z) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

1. Si determini, al variare di h in $\mathbb{R}$, la dimensione dell'immagine di f_h.
2. Fissato $h = 2$, si costruisca un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che verifichi le seguenti proprietà:
   - $\dim \mathrm{Im}\, g = 2$
   - $\dim \mathrm{Im}\, (g \circ f) = 2$
   - esiste la somma diretta $\mathrm{Im}\, g \oplus \mathrm{Span}(1,3,0)$.

   e si calcoli $g(0,1,6,3)$.

Esercizio 3
Si consideri lo spazio vettoriale reale $V = M(2,\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare Φ definito da
$$\Phi(A,B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB) \qquad \forall A, B \in V$$
Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da
$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$$

1. Si verifichi che Φ è definito positivo.
2. Si dica se f è un'applicazione simmetrice (rispetto a Φ).
3. Si verifichi che 1 è autovalore per f e si determini l'autospazio $V(1)$.
4. Si verifichi che il sottospazio $W = V(1)^\perp$ (rispetto a Φ) è f-invariante e si dica se $f|_W$ è diagonalizzabile.

1.38 Compito del 5.06.2012

Esercizio 1

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia $g \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ un endomorfismo di rango 3. Allora esiste $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ tale che $f^2 = 0$ e $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} f \oplus \ker g$.
2. Sia Φ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ di segnatura $(i_+, i_-, i_0) = (1, 2, 0)$ e sia $w \neq 0$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ isotropo. Allora la restrizione di Φ a $U = (\operatorname{Span}(w))^\perp$ ha segnatura $(0, 1, 1)$.
3. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ matrici simmetriche. Se A e B sono simili, allora sono congruenti.
4. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ matrici simmetriche. Se A e B sono congruenti, allora sono simili.

Esercizio 2

Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_k(x, y, z) = (kx + kz, 2kx + y + (2k - 1)z, kx - y + (k^2 - 1)z, -y + z) \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

1. Sia $v_\alpha = (1, 3, \alpha - 2, \alpha - 3) \in \mathbb{R}^4$. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e di $k \in \mathbb{R}$ si ha che $v_\alpha \in \operatorname{Im} f_k$.
2. Si determinino equazioni cartesiane del sottospazio di $\mathbb{R}^4$
$$W = \operatorname{Span}((2, 1, 1, 0), (1, -2, 1, 1), (3, 4, 1, -1))$$
3. Fissato $k = 2$, si dica se $\mathbb{R}^4 = W \oplus \operatorname{Im} f_2$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale $S(2) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ e sia $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Si verifichi che $PXP \in S(2)$ per ogni $X \in S(2)$.
2. Sia $f : S(2) \to S(2)$ l'applicazione lineare definita da $f(X) = PXP$ per ogni $X \in S(2)$. Si dica se f è diagonalizzabile.
3. Si costruisca, se esiste, un prodotto scalare Φ su $S(2)$ definito positivo rispetto al quale f è simmetrica e si calcoli
$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

1.39 Compito del 3.07.2012

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia Z un sottospazio di V con $0 < \dim Z < \dim V$. Allora $\dim Z = \dim(\ker f \cap Z) + \dim \operatorname{Im} f$.

2. La matrice di $M(n, \mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ è simile alla matrice $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sia r una retta di $\mathbb{R}^2$ non passante per l'origine. Sia $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ un endomorfismo tale che $f(r) = r$. Allora f è un isomorfismo.

4. Siano ψ_A e ψ_B i prodotti scalari su $\mathbb{R}^3$ associati rispettivamente alle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 00 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale sia per ψ_A che per ψ_B.

Esercizio 2
Sia A una matrice reale quadrata di ordine n.

1. Per ogni polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k \in \mathbb{R}[t]$ si ponga

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_k A^k \in M(n, \mathbb{R})$$

   dove I denota la matrice identità di ordine n. Si provi che $p(M^{-1}AM) = M^{-1}p(A)M$ per ogni $M \in GL(n, \mathbb{R})$.

2. Si supponga che A abbia esattamente due autovalori reali distinti λ_1, λ_2 con molteplicità geometriche rispettivamente d_1, d_2. Si provi che, se $d_1 + d_2 = n$, allora esiste un polinomio $q(t) \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$ tale che $\operatorname{rk} q(A) = d_1$.

Esercizio 3
Sia Φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2k & k \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$ e si consideri $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0, x - 2y + 2z = 0, x + 4y - z = 0\}$.

1. Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la segnatura di Φ.

2. Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione di $H^\perp$ (dove l'ortogonale è rispetto al prodotto scalare Φ).

3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3 = H \oplus H^\perp$.

4. Fissato $k = 3$, si determini esplicitamente, se esiste, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $\Phi|_W$ sia definito negativo.

1.40 Compito del 4.09.2012

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $f, g \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismi di V tali che $f \circ g = 0$ e $f + g$ è un isomorfismo. Allora $\dim \ker f = \dim \mathrm{Im}\, g$.

2. Esiste una matrice simmetrica $A \in M(3, \mathbb{R})$ simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Sia $k > 0$ un numero naturale e sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2k$. Siano U, W sottospazi vettoriali di V tali che $V = U \oplus W$. Sia Φ un prodotto scalare non degenere su V tale che $\Phi|_U = \Phi|_W \equiv 0$. Allora $\dim U = \dim W = k$.

4. Sia Φ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Se per ogni sottospazio $W \neq \{0\}$ di V si ha $\dim W^{\perp} > \dim V - \dim W$, allora $\Phi \equiv 0$.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(x) = p(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$.
Fissato $q(x) = x^3 + 2$, si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(p(x)) = (p(0), (pq)(0)) \qquad \forall p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$$

1. Si verifichi che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$ e se ne calcoli la dimensione.

2. Si verifichi che f è lineare, e si determinino una base di $\ker f$ ed equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}\, f$.

3. Si determini una base di $\ker f \cap W$.

4. Si costruisca, se esiste, oppure si provi che non può esistere un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3[x]$ tale che $g \circ f$ ha 3 autovalori distinti.

Esercizio 3
Al variare del parametro reale k, si consideri il prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2k & 0 & 0 & k \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ k & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

1. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Φ è definito negativo.

2. Si determini, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la segnatura di $\Phi|_U$ dove

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - z = 0, 2x - t + z = 0\}$$

3. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim \ker f = 2$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui è possibile che $\Phi(X, f(Y)) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$.

1.41 Compito del 18.09.2012

Esercizio 1

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ una matrice reale tale che $\dim \ker A = 1$. Allora esistono un numero finito di operazioni elementari per riga che trasformano A nella matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3$ un endomorfismo diagonalizzabile avente esattamente due autovalori distinti λ, μ e si supponga che la molteplicità algebrica dell'autovalore λ sia 1. Allora ogni sottospazio vettoriale Z di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = V(\lambda) \oplus Z$ contiene almeno una retta per l'origine f-invariante (dove $V(\lambda)$ denota l'autospazio per f relativo all'autovalore λ).

3. Siano U, W sottospazi di uno spazio vettoriale reale V tali che $V = U \oplus W$. Allora esiste un prodotto scalare Φ su V degenere tale che $\Phi|_U$ è definito positivo e $\Phi|_W$ è definito negativo.

4. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(r) = r$ per ogni retta di $\mathbb{R}^2$ non passante per l'origine. Allora f è l'applicazione identica.

Esercizio 2

Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}(3) = \{X \in M(3, \mathbb{R}) \mid {}^tX = -X\}$ di $M(3, \mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche. Sia $B \in M(3, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica.

1. Si verifichi che $BX + XB \in \mathcal{A}(3)$ per ogni $X \in \mathcal{A}(3)$.

2. Sia $f : \mathcal{A}(3) \to \mathcal{A}(3)$ l'applicazione definita da $f(X) = BX + XB$ per ogni $X \in \mathcal{A}(3)$. Si verifichi che f è lineare.

3. Fissata $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si dica se f è diagonalizzabile e si determini, per ogni autovalore λ, una base dell'autospazio $V(\lambda)$.

4. Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale W di $\mathcal{A}(3)$ di dimensione 2 che non sia autospazio per f ma che sia f-invariante.

Esercizio 3

Si consideri il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1, 0, 0, 1), \quad v_2 = (1, 2, 1, 2), \quad v_3 = (2, -2, -1, 1)$$

Al variare del parametro reale λ si consideri

$$Z_\lambda = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z - t = 0, \lambda x - \lambda y + (3\lambda - 1)z + t = 0, x + 2z + (3\lambda + 2)t = 0\}$$

1. Si determinino la dimensione di V ed equazioni cartesiane di V.

2. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione di Z_λ.

3. Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali esiste un prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^4$ non degenere tale che $V = Z_\lambda^\perp$; per ciascuno dei valori trovati si costruisca un tale Φ e si calcoli $\Phi((0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 2))$.

1.42 Compito del 22.1.2013

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

1. Sia $A \in M(p, n, \mathbb{R})$ una matrice di rango r. Il sistema lineare $AX = B$ ha soluzione per ogni $B \in \mathbb{R}^p$ se e solo se $r = p$.
2. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare non nulla e siano U_1, U_2 sottospazi vettoriali non nulli e distinti di V. Se $f(U_1) + f(U_2) = W$, allora $U_1 + U_2 = V$.
3. Sia $A \in M(2, \mathbb{R})$ simmetrica invertibile con $\operatorname{tr} A < 0$. Allora A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$. Se esiste $M \in O(n)$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale, allora A è simmetrica.

Esercizio 2
Sia $V = M(n, \mathbb{R})$. Sia $f : V \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare non nulla. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice non nulla. Si consideri l'applicazione $T : V \to V$ definita da

$$T(X) = \operatorname{tr}(A)X + f(x)A \quad \forall X \in V$$

1. Si verifichi che T è lineare.
2. Si verifichi che, se $f(A) \neq 0$, allora T è diagonalizzabile.
3. Fissato $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - b + c$, si determini una base di $M(2, \mathbb{R})$ di autovettori per T.

Esercizio 3
Si consideri il prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si determinino equazioni cartesiane del radicale di Φ.
2. Si dimostri che, per ogni sottospazio vettoriale H di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3, la restrizione di Φ a H è degenere.
3. Si determini un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $\Phi(v, v) < 0$.
4. Si esibiscano due sottospazi vettoriali H_1, H_2 di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tali che la resistrizione di Φ sia ad H_1 che ad H_2 è nulla.

Capitolo 2

Soluzioni

2.1 13.01.2004

Esercizio 1

a) Poiché i generatori di W_1 sono due, si ha $\dim W_1 \leq 2$. Determiniamo per quali λ i generatori di W_1 sono linearmente indipendenti risolvendo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda \\ 1 & 2 \\ 2+\lambda & 4+\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1-\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 4+\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3\lambda \\ 2+\lambda & 4+\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3\lambda \\ 0 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = 0$, il sistema ammette soluzioni non banali, cioè i generatori di W_1 sono linearmente dipendenti e dunque $\dim W_1 = 1$. Per $\lambda \neq 0$, il sistema ammette solo la soluzione nulla, dunque i generatori di W_1 sono linearmente indipendenti e $\dim W_2 = 2$. Iteriamo lo stesso ragionamento per W_2. Risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & \lambda \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = 2$, il sistema ammette soluzioni non banali, dunque $\dim W_2 = 1$ in quanto i generatori sono linearmente dipendenti. Per $\lambda \neq 2$, $\dim W_2 = 2$ in quanto i generatori sono linearmente indipendenti.

b) Dal punto precedente, sappiamo che se $\lambda = 0, \dim W_1 = 1, \dim W_2 = 2$. Si vede subito che $W_1 \subset W_2$ e quindi $W_1 + W_2 = W_2$. Dato che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Si conclude che per $\lambda = 0$ $(1,1,0) \in W_1 + W_2$. Per $\lambda = 2$ invece $\dim W_1 = 2, \dim W_2 = 1$; dato che

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 8 \tag{2.2}$$

Si conclude che, detti v_1, v_2 i vettori di base di W_1 e v_3 il vettore di base di W_2, $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare, segue che $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$, quindi automaticamente $(1,1,0) \in W_1 + W_2$. Per $\lambda \neq 0, 2$, i due sottospazi hanno dimensione 2, ma dato che sono distinti, segue che $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, e quindi anche in questo caso $(1,1,0) \in W_1 + W_2$.

Esercizio 2

a) Fissata $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata ad f nella base $\mathcal{C}$ è

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di f, fissata una base, è isomorfo al nucleo della matrice associata in tale base. Determiniamo dunque $\operatorname{Ker} f$ risolvendo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}((-2, 1, 1))$. Dalla formula delle dimensioni, sappiamo che $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$. Una base di $\operatorname{Im} f$ si ottiene pertanto prendendo due colonne linearmente indipendenti di A. Quindi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}((1, 0, 2), (3, 1, 0))$.

b) Consideriamo adesso la base di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, v_1\}$, dove $v_1 = (-2, 1, 1)$. La matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sarà

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché $\operatorname{rk} g = \dim \operatorname{Im} g = 1$, allora $\dim \operatorname{Ker} g = 2$. Consideriamo i vettori della base $\mathcal{B}$ e scriviamone i trasformati attraverso l'applicazione g:

$$g(e_1) = 0 \qquad g(e_2) = 0 \qquad g(v_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma v_1$$

Allora

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$C = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f + g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 2 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Imponendo $\operatorname{tr} C = 2$, otteniamo la condizione $\gamma = 0$, quindi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Imponiamo che $f + g$ sia un isomorfismo trovando le condizioni su α e β per cui $\det C \neq 0$:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(3\beta - \alpha)$$

Allora $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 3\beta$. Pertanto, presi $\alpha = \beta = 1$, l'applicazione g, rappresentata nella base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, v_1\}$ dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa le condizioni richieste.

Esercizio 3

a) poiché $\operatorname{rk} A = r$, $\exists M, N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tali che $MAN = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Siano $H, K \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ date da

$$H = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

Allora

$$HBK = \begin{pmatrix} MAN & 0 \\ 0 & MAN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \mathbb{I}_r & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice HBK ha $2r$ colonne linearmente indipendenti, dunque $\operatorname{rk}(HBK) = 2r$. poiché B e HBK sono SD-equivalenti, si ha $\operatorname{rk} B = 2r$. Siano adesso $H', K' \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ date da

$$H' = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M \end{pmatrix}, \qquad K' = \begin{pmatrix} N & N \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

Allora

$$H'CK' = \begin{pmatrix} MAN & 4MAN \\ 0 & MAN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 & 4\mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbb{I}_r & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $H'CK'$ ha anch'essa $2r$ colonne linearmente indipendenti, dunque, per quanto precedentemente detto, si ha $\operatorname{rk} C = 2r$.

b) Se A è diagonalizzabile, allora $\exists M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM = D$ diagonale. Sia $H \in M(2n, \mathbb{R})$ la matrice

$$H = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$H \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, infatti $H^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$. Allora si ha

$$H^{-1}BH = \begin{pmatrix} M^{-1}AM & 0 \\ 0 & M^{-1}AM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

che è una matrice diagonale. Concludiamo dunque che B è diagonalizzabile.

c) Se A è triangolabile, $\exists M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM = T$ triangolare. Allora sia

$$H = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

Per quanto visto prima, $H \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$. Allora si ha

$$H^{-1}BH = \begin{pmatrix} M^{-1}AM & 0 \\ 0 & M^{-1}AM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

che è una matrice triangolare superiore, per cui concludiamo che B è triangolabile.

Esercizio 4

a) Dato che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare e quindi è simmetrico è lineare in entrambi gli argomenti, si ha

- $b(f, g) = \langle f(v), g(v) \rangle = \langle g(v), f(v) \rangle = b(g, f)$, quindi b è simmetrico.
- Per ogni $f, g, h \in V$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta

$$b(\alpha f + \beta g, h) = \langle (\alpha f + \beta g)(v), h(v) \rangle = \alpha \langle f(v), h(v) \rangle + \beta \langle g(v), h(v) \rangle = \alpha b(f, h) + \beta b(g, h)$$

Da cui segue che b è un prodotto scalare su V.

b) Dato che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo, segue che, fissato $v \in \mathbb{R}^k$ diverso da zero, per ogni $f, g \in V$ si ha $\langle f(v), g(v) \rangle = b(f, g) > 0$, quindi b risulta definito positivo, e avrà dunque segnatura $((nk)^2, 0, 0)$, dato che $\dim \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) = nk$.

2.2 03.02.2004

Esercizio 1
Si applichi la definizione di autovettore, cioè che esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $Av = \lambda v$. Per v_1 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a-b \\ 2d-e \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eguagliando le prime coordinate, troviamo che deve essere necessariamente $\lambda = 0$ affinché l'uguaglianza sussista, cioè $v_1 \in \operatorname{Ker} A$. Dunque dovrà essere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2a-b \\ 2d-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo le condizioni $b = 2a, e = 2d$. Allora tutte le matrici 3×3 della forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & c \\ d & 2d & f \end{pmatrix}$ ammettono v_1 come autovettore relativo all'autovalore 0. Procediamo adesso imponendo che v_2 sia autovettore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & c \\ d & 2d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a-c \\ 3d-f \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso, eguagliando le prime coordinate troviamo che deve essere $\lambda = 0$ e dunque $v_2 \in \operatorname{Ker} A$. Allora dovrà essere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3a-c \\ 3d-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo le condizioni $c = 3a, f = 3d$. Pertanto tutte le matrici reali 3×3 della forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ d & 2d & 3d \end{pmatrix}$ ammettono v_1 e v_2 come autovettori relativi all'autovalore 0. Imponiamo adesso che v_3 sia autovettore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ d & 2d & 3d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6a \\ 6d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ancora una volta, dalla prima coordinata ricaviamo il valore di λ. In questo caso, abbiamo che $\lambda = 6$ e dunque $v_3 \in V(6)$. Dunque dovrà essere

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6a \\ 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $a = d = 1$. Allora l'unica matrice reale 3×3 che ammette come autovettori v_1, v_2, v_3 è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

a) La matrice nulla, denotata con 0_M appartiene a V_B, infatti $0_M B = B 0_M = 0$. Siano adesso $L, M \in V_B$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora

$$B(\lambda L + \mu M) = \lambda BL + \mu BM = \lambda LB + \mu MB = (\lambda L + \mu M)B$$

dunque V_B è chiuso per combinazioni lineari e pertanto è un sottospazio vettoriale di V_B.

b) Sicuramente $\mathbb{I}_n, B \in V_B$. Se non esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $B = \lambda\mathbb{I}_n$, allora $\mathbb{I}_n$ e B sono due elementi di V_B linearmente indipendenti, e dunque $\dim V_B \geq 2$. Altrimenti, se $B = \lambda\mathbb{I}_n$, allora tutte le matrici $n \times n$ commutano con B in quanto multiplo dell'identità e dunque in questo caso $\dim V_B = n^2 \geq 2$.

c) Osserviamo che, facendo i prodotti fra B e una generica matrice $n \times n$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Affinché i prodotti siano uguali, dobbiamo imporre che $a_{i1} = 0$ per $i = 2, \dots, n$ e $a_{1j} = 0$ per $j = 2, \dots, n$. L'elemento a_{11} è libero perché uguale in entrambi i prodotti. In più gli elementi del minore $n-1 \times n-1$ ottenuto escludendo la prima riga e la prima colonna non contribuiscono nei prodotti, e dunque rimangono liberi. Deduciamo dunque che una generica matrice appartenente a V_B avrà $(n-1)^2 + 1$ parametri liberi, da cui segue che $\dim V_B = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

Esercizio 3

a) Dalla formula di Grassman segue che $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Sia $\{w\}$ una base di $W_1 \cap W_2$. poiché W_1, W_2 sono f- invarianti, si ha che $f(W_1 \cap W_2) = W_1 \cap W_2$, dunque risulta che $W_1 \cap W_2$ è un autospazio relativo ad un certo autovalore λ e w è autovettore. Per il teorema di completamento a base, esiste $u_1 \in W_1$ tale che $\{w, u_1\}$ è base di W_1 ed esiste $u_2 \in W_2$ tale che $\{w, u_2\}$ è base di W_2. Allora $\{w, u_1, u_2\}$ è base di $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che

- $f(w) = \lambda w$ poiché w è autovettore.
- $f(u_1) = aw + bu_1$ poiché W_1 è f-invariante.
- $f(u_2) = cw + du_2$ poiché W_2 è f-invariante.

Allora la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B} = \{w, u_1, u_2\}$ sarà:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

che è una matrice triangolare superiore. Dunque f risulterà triangolabile.

b) Se f fosse diagonalizzabile, allora esisterebbe $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f, con $v_1 \in W_1 \cap W_2$ (per quanto visto prima), $v_2 \in W_1 \setminus W_2$ e $v_3 \in W_2 \setminus W_1$. Allora il sottospazio $W_3 = \text{Span}(v_2, v_3)$ sarebbe un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 diverso da W_1 e W_2 f-invariante, il che è impossibile dato che per ipotesi W_1 e W_2 sono gli unici sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 f-invarianti. Dunque f non può essere diagonalizzabile.

c)

d)

Esercizio 4

a) è ovvio che se un vettore è nel radicale, esso è anche isotropo: $\text{Rad}(\Phi) \subseteq \text{Is}(\Phi)$ (con $\text{Is}(\Phi)$ si indicheranno i vettori isotropi rispetto a Φ). Si consideri ora il caso di un prodotto scalare semidefinito positivo (la tesi e la dimostrazione sono analoghe per un prodotto scalare semidefinitio negativo): per il teorema di Sylvester, esiste una base in cui la matrice associata a Φ è della forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_{i_+} & 0 \\ \hline 0 & 0_{i_0} \end{array}\right)$$

Detto $[v]$ il vettore delle coordinate di v rispetto alla base di Sylvester, la condizione di isotropia è che le prime i_+ coordinate siano tutte nulle: dette $\alpha_1, ..., \alpha_n$ le coordinate di w isotropo, allora si ha $\Phi(w, w) = \alpha_1^2 + ... + \alpha_{i_+}^2 = 0$, da cui $\alpha_1 = ... = \alpha_{i_+} = 0$. Sia v un vettore di V di coordinate $\beta_1, ..., \beta_n$: allora ${}^t[v]A = (\beta_1, ..., \beta_{i_+}, 0, ..., 0)$: dato che w isotropo è della forma $(0, ..., 0, \alpha_{i_++1}, ..., \alpha_n)$, si ha che ${}^t[v]A[w] = 0 \ \forall v \in V$, da cui w è nel radicale: $\mathrm{Rad}\,(\Phi) \supseteq \mathrm{Is}(\Phi)$, che a sistema con l'inclusione banale dà $\mathrm{Rad}\,(\Phi) = \mathrm{Is}(\Phi)$. L'affermazione è quindi vera.

b) Sia $V = \mathbb{R}^2$, e sia Φ il prodotto scalare rappresentato in base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

come si può notare immediatamente, $i_0(\Phi) = 0$. Sia W il sottospazio vettoriale generato da e_2: la restrizione di Φ a W è data dal prodotto scalare nullo, e ha indice $i_0(\Phi_{|W}) = 1 \geq i_0(\Phi)$. L'affermazione è quindi falsa.

c) Sia $i_+ \geq i_-$: la tesi è analoga nell'altro caso. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si consideri una base nella quale la matrice associata al prodotto scalare è della forma

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{i_+-i_-} & 0 & ... & 0 \\ \hline 0 & A & ... & 0 \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline 0 & 0 & ... & A \end{array}\right)$$

Dato che M e Φ hanno la stessa segnatura, una base del genere esiste (e si ottiene permutando i vettori di una base di Sylvester). In ogni sottospazio F generato da due vettori della base adiacenti e tale che la matrice associata a $\Phi_{|F}$ è A esiste un vettore isotropo (in quanto $\Phi_{|F}$ ha segnatura (1,-1,0)): tale vettore isotropo è inoltre ortogonale ad ogni vettore che non è in F. Essendovi almeno i_- restrizioni del genere, siano $v_1, ..., v_{i_-}$ tali vettori isotropi, W il sottospazio da essi generato: $\Phi_{|W} = 0$ e $\dim W = i_-$ (i vettori scelti appartengono tutti quanti a sottospazi in somma diretta, e sono linearmente indipendenti), da cui l'affermazione è vera.

2.3 08.07.2004

Esercizio 1

1. Consideriamo la matrice avente per colonne le coordinate dei v_i:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & t-2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2t-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

Consideriamo il minore 3×3 di A formato dalle prime tre righe e tre colonne. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

I determinanti dei due possibili minori orlati sono:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & t-2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2t-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 11 - 11t, \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & t-2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2t-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = 8t - 8$$

Concludiamo che se $t = 1$, per il criterio dei minori orlati, $\operatorname{rk} A = 3$, dunque $\dim W_t = 3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di W_1. Se $t \neq 1$, $\operatorname{rk} A = 4$, $\dim W_t = 4$ e $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di W_t.

2.

2.4 18.01.2005

Esercizio 1

Notiamo innanzitutto che $V_1 \cap V_2 = \operatorname{Span}(1,1,1)$, indichiamo con $v_1 = (1,1,1)$. Determiniamo una base di $\operatorname{Im} f$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Si ottiene (omettiamo i calcoli) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}((0,1,1,0),(-1,1,0,1))$, indichiamo i due vettori rispettivamente con w_1, w_2 i due vettori di base di $\operatorname{Im} f$. Dato che $\dim \operatorname{Im} f = 2$, dovrà essere $\dim \ker f = 1$. Siano $v_2 = (1,0,0), v_3 = (0,1,0)$, allora $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (per verificarlo, è sufficiente verificare che $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$). Definiamo adesso i trasformati dei vettori della base che abbiamo fissato attraverso f (questo determina univocamente l'applicazione):

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 \\ f(v_2) &= w_2 \\ f(v_3) &= w_1 + w_2 \end{aligned}$$

Questa scelta segue dal fatto che dobbiamo avere solo due colonne linearmente indipendenti (corrispondenti a w_1, w_2) in modo che l'immagine dell'applicazione sia il sottospazio assegnato. Non abbiamo scelto $f(v_3) = \alpha w_{1,2}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ in quanto, sebbene l'immagine dell'applicazione sarebbe rimasta invariata, la restrizione ad uno dei due sottospazi non sarebbe risultata iniettiva: per garantire questa condizione, abbiamo dovuto scegliere i trasformati in modo tale che fossero a due a due linearmente indipendenti. Allora l'applicazione f, associata nelle basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e canonica di $\mathbb{R}^4$ alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica le condizioni richieste. Inoltre

$$f(3,2,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.5 18.01.2006

Esercizio 1

Si consideri la matrice dei coefficienti associata al sistema lineare. Se tale matrice ha determinante non nullo, allora lo span delle colonne coincide con l'intero spazio, e la soluzione è unicamente determinata, in quanto tali colonne possono essere prese come base dello spazio.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ 0 & 2 & 3 \\ \alpha-1 & 3-\alpha & 3+\alpha \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha determinante $4\alpha^2 + \alpha - 3$, ed esistono quindi due valori della variabile per i quali il determinante si annulla (α = -1 oppure $\alpha = \frac{3}{4}$): per tutti gli altri valori di α la soluzione esiste ed è unica. Si considerino i casi in cui il determinante è nullo. Nel caso α = -1, il sistema diventa

$$\begin{cases} -x+2y+z=1 \\ \\ 2y+3z=-1 \\ \\ -2x+4y+2z=0 \end{cases}$$

Bisogna quindi controllare se il vettore del termine noto appartiene allo span delle colonne della matrice dei coefficienti attraverso l'eliminazione di Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}$$

Dalla terza riga, le incognite dovrebbero essere tali che $0x + 0y + 0z = -2$: ciò è impossibile, quindi la soluzione non esiste. Si procede analogamente per $\alpha = \frac{3}{4}$: il sistema è

$$\begin{cases} 3x+y+-3z=4 \\ \\ 8y+12z=3 \\ \\ -x+9y+15z=7 \end{cases}$$

e, dall'eliminazione di Gauss, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 12 \\ -1 & 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ \frac{29}{6} \end{matrix}$$

Per le stesse ragioni di cui prima, il sistema non ha soluzione.

Esercizio 2

1. Lo 0 appartiene a W: infatti ${}^t0 = 0$, e $0 + 0 = 0 \in \text{Span}(I)$. Siano M ed N appartenenti a W: allora $\mu M + \rho N + \mu {}^tM + \rho {}^tN = \mu(M + {}^tM) + \rho(N + {}^tN) = \mu\alpha I + \rho\beta I = (\mu\alpha + \rho\beta)I$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: segue che $\mu M + \rho N \in W$.

2. Si fissi v: allora $F_v(\mu M + \rho N) = (\mu M + \rho N)v = \mu M v + \rho N v = \mu F_v(M) + \rho F_v(N)$. L'applicazione è quindi lineare.

3. Si considerino le basi canoniche per lo spazio delle matrici V e lo spazio $\mathbb{R}^n$. In tali basi, fissato v, l'applicazione della matrice e_{nm} (definita come la matrice che ha come elemento di posizione n, m 1 e come qualsiasi altro elemento 0) al vettore dà come risultato la m-esima componente numerica del vettore all'n-esimo posto. Ricordando che nella base canonica di $\mathbb{R}^n$ vettori e coordinate coincidono, la matrice associata all'applicazione è ottenuta quindi affiancando i vari vettori risultanti: tale matrice sarà di taglia $n \times n^2$, composta per blocchi da matrici quadrate $n \times n$: l'i-esimo blocco quadrato avrà tutte le righe nulle, a parte la riga i, che conterrà le componenti del vettore per riga.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} v & 0 & 0 & ... \\ 0 & v & 0 & ... \\ 0 & 0 & v & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{array}\right)$$

Nella matrice, ogni colonna deve essere intesa come il blocco $n \times n$ sopra descritto. Per non avere righe nulle (da cui discende la surgettività, in quanto il rango massimo della matrice associata è n, come la dimensione di $\mathbb{R}^n$) basta quindi che il vettore non sia nullo: l'applicazione è quindi surgettiva $\forall v \in \mathbb{R}^n$ a parte il vettore nullo. Nota per il punto successivo: se $v = 0$, allora F_v coincide con l'applicazione identicamente nulla.

4. Dalla formula delle dimensioni, la dimensione del Ker di F_0 è n^2: dato che la dimensione di W non è n^2 (si può subito trovare una matrice non appartenente a W, e di conseguenza tutte le matrici multiple di essa non appartengono a W) gli spazi non sono isomorfi se $v = 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Si considerino gli altri casi: converrà calcolare la dimensione di W. Una qualsiasi matrice di W è della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & ... \\ b & a & -d & ... \\ c & d & a & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Come si può notare, le matrici di W con $a = 0$ sono matrici antisimmetriche: come base di W basta prendere quindi una base per lo spazio delle matrici antisimmetriche, e poi aggiungere a tale insieme la matrice identità. La dimensione dello spazio delle matrici antisimmetriche è $\frac{n^2-n}{2}$ (basta contare le matrici nella base delle matrici antisimmetriche) e la matrice identità, non essendo antisimmetrica, forma con le altre matrici un insieme linearmente indipendente che genera l'intero spazio: la dimensione di W è quindi $\frac{n^2-n}{2} + 1$. Il Ker di F_v ha dimensione $n^2 - n$: imponendo $\dim \mathrm{Ker}\,(F_v) = \dim W$, si ottiene l' equazione algebrica per i valori di n che rendono gli spazi alla stessa dimensione, e quindi isomorfi $\forall v \in \mathbb{R}^n$ (a parte il già trattato vettore nullo): i valori di n che risolvono l'equazione sono dunque $n =$ -1 e $n = 2$: dato che $n \in \mathbb{N}$, la prima soluzione va scartata e l'unico valore di n per avere spazi isomorfi è 2.

Esercizio 3

1. Si consideri la base canonica dello spazio delle matrici considerate. Usando le notazioni dell'esercizio precedente, si costruirà la matrice associata al prodotto scalare in tale base. Si noti che il prodotto tra due matrici in tale base dà sempre la matrice nulla, a meno che e_{nm} non venga moltiplicata per la sua trasposta e_{mn}, che appartiene alla base: in tale caso la matrice risultante avrà un 1 sulla diagonale principale (in posizione dipendente da n e da m) e 0 in tutte le altre posizioni. Allora $\varphi(e_{nm}, e_{jk}) = \delta_{nk}\delta_{mj}$. Se B e C appartengono allo spazio, esse possono essere decomposte in combinazione lineare delle matrici della base: ad esempio, $B = \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + ...$: analogamente, ${}^tB = \beta_{11}e_{11} + \beta_{12}e_{12} + ...$: i vari coefficienti sono tali che $\alpha_{nm} = \beta_{mn}$. Il prodotto scalare $\varphi(B, B)$ avrà quindi come risultato (per linearità) $\sum_{n,m,j,k} \alpha_{nm}\beta_{jk}\varphi(e_{nm}, e_{jk}) = \sum_{n,m,j,k} \alpha_{nm}\beta_{jk}\delta_{nk}\delta_{mj} = \sum_{n,m} \alpha_{nm}\beta_{mn} = \sum_{n,m} \alpha_{nm}^2$: la somma è sicuramente positiva in quanto somma di quadrati di coefficienti reali, ed è nulla se e solo se $\alpha_{nm} = 0\ \forall n, m$: ma la matrice con tutti coefficienti nulli è la matrice nulla, e quindi $\forall B \in V\ \varphi(B, B) \geq 0$, e l'uguaglianza sussiste se e solo se $B = 0$: il prodotto scalare è definito positivo.

2. Sia λ autovalore per A: allora $\exists w \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Aw = \lambda w$. Sia W la matrice che ha per colonne w: allora

$$f_A(W) = AW = \left(\ Aw \mid Aw \mid ... \ \right) = \left(\ \lambda w \mid \lambda w \mid ... \ \right) = \lambda W$$

λ è autovalore per f_A. Viceversa, sia λ autovalore per f_A: allora $\exists X \neq 0 \in V$ tale che $f_A(X) = \lambda X = AX$. Allora, indicando con x^i la i-esima colonna di X, si ottiene, per definizione di prodotto matriciale,

$$AX = \left(\ Ax^1 \mid Ax^2 \mid ... \ \right) = \lambda X = \left(\ \lambda x^1 \mid \lambda x^2 \mid ... \ \right)$$

da cui, $\forall i$, $Ax^i = \lambda x^i$: dato che X è per ipotesi non nulla, almeno una delle x^i è non nulla, da cui λ è autovalore per A.

3. Si ottiene il risultato in maniera immediata dalla definizione del prodotto scalare: $\varphi(f_A(X), Y) = \operatorname{tr}({}^t(AX)Y) = \operatorname{tr}({}^tXAY) = \varphi(X, f_A(Y))$.

4. Si sceglie, come base di partenza, la base canonica descritta precedentemente nello spazio delle matrici 2 x 2.

$$Ae_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Ae_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Ae_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Ae_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata all'endomorfismo è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice vale $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2$: gli autovalori sono quindi 0 e 2, di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica sicuramente 2, in quanto l'endomorfismo è simmetrico, quindi diagonalizzabile. Una base di autovettori è quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e in tale base la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tali vettori vanno ortogonalizzati. Applicando il prodotto scalare, si nota che la prima matrice è ortogonale a tutte le altre, la seconda è ortogonale alla terza e alla quarta e la terza è ortogonale alla quarta: la base è già ortogonale, e per ottenere una base ortonormale basterà dividere le matrici per la loro norma (che vale $\sqrt{2}$ per tutte le matrici).

Esercizio 4
Una base per U (alla quale non appartengono i vettori indicati) è data dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che si noteranno con u_1 ed u_2. Si consideri l'insieme formato da v_1 e i due vettori della base di U indicata e si scriva la matrice associata a Φ in tale base,

$$\begin{pmatrix} 4 & a & b \\ a & c & d \\ b & d & e \end{pmatrix}$$

il 4 soddisfa la condizione sulla norma di v_1. In tale base, v_1 ha coordinate $(1, 0, 0)$, v_2 ha coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, v_3 ha coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, v_4 ha coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. I vettori della base di U sono rappresentati dai vettori canonici e_2 ed e_3. Si imponga la condizione sullo $\text{Span}(v_1, v_2)^\perp$: affinché $\text{Span}(v_1)$ sia ortogonale a U, devono essere $a = b = 0$. Si imponga ora che v_2 sia ortogonale ai vettori di U: se tale condizione è valida, $\forall v \in \text{Span}(v_1, v_2)$, $\forall u \in U$, $\Phi(v, u) = \Phi(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha\Phi(v_1, u) + \beta\Phi(v_2, u) = 0$, da cui $U \subseteq \text{Span}(v_1, v_2)^\perp$: dato che $\text{Span}(v_1, v_2)^\perp$ non può avere dimensione 3 (in tal caso coinciderebbe con $\mathbb{R}^3$, ma $v_1 \notin \text{Span}(v_1, v_2)^\perp$ per la prima condizione) esso ha forzatamente dimensione 2, e coincide quindi con U, in quanto lo contiene e ha la sua stessa dimensione. $\Phi(v_2, u_1) = \frac{3c}{2} + \frac{3d}{2} = 0 \Rightarrow c = -d$, e $\Phi(v_2, u_2) = \frac{3d}{2} + \frac{3e}{2} = 0 \Rightarrow d = -e$: la matrice associata può quindi essere scritta come

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix}$$

Si imponga $\Phi(v_3, v_4) = 0$: $\Phi(v_3, v_4) = 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$. Dato che è stato costruito il più generico prodotto scalare avente tali caratteristiche e i coefficienti della matrice associata sono univocamente determinati, esso è unico. Il prodotto scalare Φ richiesto è quindi quello rappresentato nella base indicata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.6 6.02.2008

Esercizio 3

1. Una matrice $D \in {}_n\mathbb{R}_n$ diagonale definita positiva è della forma

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

con $a_i > 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. In tal caso, sono ben definite per ogni i le quantità $\sqrt{a_i} \in \mathbb{R}$. Allora, scelta $F \in {}_n\mathbb{R}_n$ diagonale data da

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & & \\ & \sqrt{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix}$$

si ha $F^2 = D$.

2. Dal fatto che A è simmetrica e definita positiva, allora essa sarà simile e congruente ad una matrice diagonale D definita positiva, ossia, dalla definizione, $\exists M, N \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM = D, {}^tNAN = D$. Da queste due relazioni concludiamo che $N = M$, che implica ${}^tM = M^{-1}$, cioè $M \in O(n)$. Dal punto 1, sappiamo che esiste una matrice diagonale F (che come abbiamo visto, possiamo scegliere definita positiva) tale che $F^2 = D$. Scegliamo a questo punto $S = MFM^{-1}$. Questa matrice è sicuramente definita positiva in quanto è simile ad una matrice diagonale definita positiva e si ha $S^2 = MFM^{-1}MFM^{-1} = MF^2M^{-1} = MDM^{-1} = A$. Inoltre, dato che $M \in O(n)$, risulta che ${}^tS = {}^t(MFM^{-1}) = {}^t(M^{-1}){}^tF{}^tM = {}^t({}^tM)FM^{-1} = MFM^{-1} = S$, quindi S è simmetrica, ed è proprio una matrice che soddisfa le richieste del problema.

3. Sia $A = {}^tMM$. Si ha immediatamente che ${}^tA = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM = A$, quindi A è simmetrica. Inoltre, si ha $A = {}^tMM = {}^tMIM$, dove I è la matrice identica di ordine n. Da questa eguaglianza si conclude che A è congruente all'identità, che è definita positiva, quindi anche A risulta definita positiva.

4.

2.7 8.07.2008

Esercizio 1

1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, siano $v, w \in V$. Allora $L(\alpha v+\beta w) = f(\alpha v+\beta w)+g(\alpha v+\beta w) = \alpha f(v)+\beta f(w)+\alpha g(v)+\beta g(w) = \alpha(f(v)+g(v))+\beta(f(w)+g(w)) = \alpha L(v)+\beta L(w)$.
2. Sia $v \in \operatorname{Ker} L$. Allora $L(v) = f(v)+g(v) = 0$: dato che $f(v) \in W_1$ e $g(v) \in W_2$ e i due spazi sono in somma diretta, $f(v)+g(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \wedge g(v) = 0$. Viceversa, sia $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$: allora $L(v) = f(v)+g(v) = 0+0 = 0$, da cui $v \in \operatorname{Ker} L$.
3. $\Rightarrow$: Si proceda per assurdo: si supponga che $\exists v \in V$ tale che $v \notin \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ (V contiene sicuramente la somma dei nuclei, in quanto è un suo sottospazio vettoriale). Allora $L(v) = f(v)+g(v)$: dato che gli spazi W_1 e W_2 sono in somma diretta, $L(v) \notin W_1 \oplus W_2$ (addizionando due vettori non nulli di due sottospazi vettoriali in somma diretta, si ottiene un vettore che non appartiene a nessuno dei due sottospazi di partenza): quindi $L(v) \notin \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$: assurdo. $\leftarrow$: Ovviamente le due immagini hanno intersezione zero, in quanto le funzioni hanno codomini ad intersezione zero. Sia ora $w \in \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$: allora $\exists v \in V : f(v) = w \vee g(v) = w$: data l'ipotesi, se $f(v) = w$ allora $g(v) = 0$ (e viceversa), da cui $w \in \operatorname{Im} L$. Sia $w \in \operatorname{Im} L$ tale che $\exists v \in V : L(v) = w = f(v)+g(v)$: dato che almeno uno dei due addendi è per ipotesi forzatamente nullo, $w \in \operatorname{Im} f \vee \operatorname{Im} g$, da cui $w \in \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$, da cui la tesi.

Esercizio 2
Si consideri la base canonica dello spazio e si costruisca la matrice associata all'applicazione lineare. Per ottenere in maniera immediata la condizione sul polinomio caratteristico, essa può essere imposta nella forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per imporre la condizione che il nucleo di f abbia dimensione due, basta far sì che il minore principale di determinante non nullo di massimo ordine abbia ordine pari a due: ciò è facilmente imponibile imponendo che in alto a destra appaia la matrice identità, e azzerando i restanti coefficienti. La matrice associata ad un'applicazione con le caratteristiche richieste sarà quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si calcoli f^2: dal semplice prodotto matriciale si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

I calcoli sono quindi immediati: dato che vi sono tre colonne nulle, il Ker ha dimensione 3. Per l'ultima richiesta, il metodo più veloce consiste nel calcolare la matrice $(f-2id)^2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nota immediatamente che il nucleo di tale matrice ha dimensione 1.

Esercizio 3

1. Simmetria: $\phi(g,f) = b(g(v_1), f(v_1)) + b(g(v_2), f(v_2)) = b(f(v_1), g(v_1)) + b(f(v_2), g(v_2)) = \phi(f,g)$. Basta quindi controllare la linearità per un solo argomento: $\phi(\alpha f+\beta h, g) = b((\alpha f+\beta h)(v_1), g(v_1))+ b((\alpha f+\beta h)(v_2), g(v_2)) = \alpha b(f(v_1), g(v_1)) + \beta b(h(v_1), g(v_1)) + \alpha b(f(v_2), g(v_2)) + \beta b(h(v_2), g(v_2)) = \alpha\phi(f,g) + \beta\phi(h,g)$. ϕ gode di linearità negli argomenti e simmetria: è quindi un prodotto scalare.

2. Conviene calcolare, in base canonica per lo spazio delle applicazioni (che si ricorda essere formata dalle applicazioni rappresentate in base canonica di R^2 dalle matrici della base canonica dello spazio di ${}_2\mathbb{R}_2$), la matrice associata al prodotto scalare, in quanto tale risultato sarà utile anche per il prossimo punto. Sia e_{nm} applicazione della base canonica che ha nella matrice associata 1 al posto (n,m) e zero nelle altre posizioni: allora $e_{11}(v_1) = (1,0)$, $e_{12}(v_1) = (1,0)$, $e_{21}(v_1) = (0,1)$, $e_{22}(v_1) = (0,1)$, $e_{11}(v_2) = (2,0)$, $e_{12}(v_2) = (\lambda,0)$, $e_{21}(v_2) = (0,2)$, $e_{22}(v_2) = (0,\lambda)$. Vanno quindi calcolati i vari $\phi(e_{nm}, e_{jk})$:
$$\phi(e_{11}, e_{11}) = b(e_{11}(v_1), e_{11}(v_1)) + b(e_{11}(v_2), e_{11}(v_2)) = 0 + 0 = 0$$
$$\phi(e_{12}, e_{12}) = b(e_{12}(v_1), e_{12}(v_1)) + b(e_{12}(v_2), e_{12}(v_2)) = 0 + 0 = 0$$
$$\phi(e_{21}, e_{21}) = b(e_{21}(v_1), e_{21}(v_1)) + b(e_{21}(v_2), e_{21}(v_2)) = 0 + 0 = 0$$
$$\phi(e_{22}, e_{22}) = b(e_{22}(v_1), e_{22}(v_1)) + b(e_{22}(v_2), e_{22}(v_2)) = 0 + 0 = 0$$
$$\phi(e_{11}, e_{12}) = b(e_{11}(v_1), e_{12}(v_1)) + b(e_{11}(v_2), e_{12}(v_2)) = 0 + 0 = 0$$
$$\phi(e_{11}, e_{21}) = b(e_{11}(v_1), e_{21}(v_1)) + b(e_{11}(v_2), e_{21}(v_2)) = 1 + 4 = 5$$
$$\phi(e_{11}, e_{22}) = b(e_{11}(v_1), e_{22}(v_1)) + b(e_{11}(v_2), e_{22}(v_2)) = 1 + 2\lambda$$
$$\phi(e_{12}, e_{21}) = b(e_{12}(v_1), e_{21}(v_1)) + b(e_{12}(v_2), e_{21}(v_2)) = 1 + 2\lambda$$
$$\phi(e_{12}, e_{22}) = b(e_{12}(v_1), e_{22}(v_1)) + b(e_{12}(v_2), e_{22}(v_2)) = 1 + \lambda^2$$
$$\phi(e_{21}, e_{22}) = b(e_{21}(v_1), e_{22}(v_1)) + b(e_{21}(v_2), e_{22}(v_2)) = 0 + 0 = 0$$
La matrice associata nella base indicata è quindi
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1+2\lambda \\ 0 & 0 & 1+2\lambda & 1+\lambda^2 \\ 5 & 1+2\lambda & 0 & 0 \\ 1+2\lambda & 1+\lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Tale matrice ha determinante $(\lambda-2)^4$: quindi, $\forall\lambda \neq 2$, il prodotto scalare è non degenere.

3. Il blocco 2x2 formato dalla prima e terza riga e dalla prima e terza colonna rappresenta la restrizione del prodotto scalare al primo e terzo vettore della base, ed ha determinante negativo (-25): allora tale matrice è congrua a
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
da cui $i_+ \geq 1$ e $i_- \geq 1$: allora il prodotto scalare, $\forall\lambda$, non è mai definito positivo né negativo. Dato che il determinante della matrice è positivo $\forall\lambda \neq 2$, la forma di Sylvester della matrice dovrà avere un numero pari di -1, almeno un -1 e almeno un +1: l'unica scelta possibile tra le matrici 4x4 è
$$\left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 \end{array}\right)$$
da cui, indipendentemente dal valore di λ (escludendo il valore 2), il prodotto scalare ha segnatura $(i_+, i_-, i_0) = (2,2,0)$.

Esercizio 4

La risposta alla seconda domanda è immediata: la traccia è un invariante per similitudine, ma la prima matrice ha traccia 2, mentre la seconda ha traccia 3: le matrici non sono simili. Per rispondere alla prima, si calcolino i ranghi delle matrici: ambedue non hanno rango massimo (A ha due righe uguali, sommare la seconda riga di B e la terza moltiplicata per $\frac{1}{2}$ dà la quarta riga), ma ambedue hanno un minore di ordine 3 di rango massimo (per A il minore 3x3 in basso a destra, per B il minore 3x3 in alto a sinistra): il rango delle due matrici è 3, ed esse sono SD-equivalenti. Per la congruenza, va calcolata la segnatura: entrambe le matrici hanno indice $i_0 = 1$ (in quanto hanno rango 3). Il calcolo della segnatura di B è semplice: infatti i primi due minori principali hanno determinante positivo, da cui $i_+ \geq 2$, mentre il terzo minore principale ha determinante negativo: allora esso è congruo alla matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_1 \end{array}\right)$$

per la condizione sull'indice di positività. In totale, la segnatura di B è $(2, 1, 1)$. A ha il primo minore di determinante positivo, quindi $i_+ \geq 1$: inoltre, il minore 3x3 in basso a destra ha determinante -1, ed è quindi congruo a

$$\left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_1 \end{array}\right)$$

oppure a $-I_3$: ma se fosse congruo a tale matrice, si avrebbe $i_- \geq 3$, e $i_+ + i_- + i_0 \geq 5$, assurdo: quindi tale minore deve essere forzatamente congruo alla prima matrice: A ha segnatura $(2, 1, 1)$, e le due matrici sono congruenti.

2.8 17.09.2008

Esercizio 1

a) L'endomorfismo nullo (indicato con 0_f) appartiene ad A, B: infatti $\operatorname{Ker} 0_f = V$, e $\operatorname{Im} 0_f = 0$: dato che $V \supset W$ e $0 \subset W$ (in quanto W è sottospazio vettoriale, e sicuramente contiene lo 0 di V), si ha $0_f \in A, B$. Siano $f, g \in A$, α, β scalari del campo $\mathbb{K}$ di V: sicuramente $\alpha f + \beta g$ è lineare. Sia $w \in W$: allora $(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha f(w) + \beta g(w) = 0 + 0 = 0$, in quanto $W \supset \operatorname{Ker} f, \operatorname{Ker} g$: allora $W \supset \operatorname{Ker}(\alpha f + \beta g)$ e $\alpha f + \beta g \in A$, da cui A è chiuso per combinazioni lineari dei suoi elementi, ed è sottospazio vettoriale. Si consideri una base di V in cui i primi k elementi formano una base per W: la matrice associata in tale base ad una qualsiasi $f \in A$ ha le prime k colonne nulle (in quanto contengono le coordinate dei vari $f(w_i)$, che sono vettori nulli per definizione di A): allora lo spazio ha dimensione $n(n-k)$, in quanto non vi sono condizioni sui restanti $n-k$ vettori della base.
Si esamini B, usando le stesse notazioni di cui prima: sia $v \in V$, allora $f(v) \in W$ e $g(v) \in W$. Allora $(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha f(v) + \beta g(v) \in W$, in quanto W è chiuso per combinazioni lineari dei propri elementi: allora $\alpha f + \beta g \in B$, e B è sottospazio vettoriale. Ci si ponga nella stessa base di cui prima: stavolta, dato che $\forall v \in V f(v)$ è combinazione lineare dei soli primi k elementi della base scelta (con, ovviamente, $f \in B$), allora le ultime $(n-k)$ righe sono tutte forzatamente nulle, mentre sulle altre non vengono date condizioni: la dimensione di B è nk.

b) Sia $f \in C$: f può essere scomposto come somma di due endomorfismi: h sarà tale che $h(w) = f(w)$ $\forall w \in W$ e $h(v) = 0\ \forall v \notin W$, e t sarà tale che $t(w) = 0\ \forall w \in W$ e $t(v) = f(v)\ \forall v \notin W$. I due endomorfismi sono stati costruiti in maniera tale che $h + t = f$ (infatti, se $w \in W$, $(h+t)(w) = h(w) + t(w) = f(w) + 0$ e, se $v \notin W$, $(h+t)(v) = h(v) + t(v) = 0 + f(v)$). Si ha che $\operatorname{Im} h \subset W$, e $\operatorname{Ker} t \supset W$ (in quanto h è non nullo solo su W, sui quali vettori restituisce un vettore di W, e t dè vettori nulli se applicato su vettori di W): allora $h \in B, t \in A$ da cui, $\forall f \in C$, f può essere espresso come somma di un endomorfismo di A ed uno di B, da cui $f \in A + B$: $C \subseteq A + B$. Si consideri $f \in A + B$: considerando f come somma di una $h \in B$ e una $t \in A$, si ha che $f(w) = h(w) + t(w)$: di questi due vettori, $t(w)$ è nullo, e $h(w) \in W$, da cui $f(W) \subset W$ e $f \in C$: $A + B \subset C$, e data anche la precedente inclusione $A + B = C$.

c) Dalla formula di Grassmann, $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$. Dato che è stato provato che $A + B = C$, imponendo che l'intersezione tra i due sottospazi contenga solo lo 0 , bisogna trovare i valori di k per cui $\dim C = \dim A + \dim B$. Bisogna quindi calcolare la dimensione di C. Utilizzando una base come quella usata per trovare le dimensioni di A e di B, si ha che le prime k colonne della matrice associata ad un qualsiasi $f \in C$ devono avere le ultime $(n-k)$ righe tutte nulle (in quanto $f(W) \subset W$: tutti gli altri valori sono liberi, da cui dim $C = k^2 + n(n-k)$. Imponendo l'uguaglianza, deve essere $k^2 + n(n-k) = n(n-k) + nk$: tale equazione ha soluzioni $k = 0$ o $k = n$, da cui la richiesta è soddisfatta se e solo se $W = 0$ o $W = V$.

Esercizio 2

a) Il polinomio caratteristico della matrice vale $(\lambda - 1)^2 \lambda(\lambda - \alpha)$. Gli autovalori sono quindi α, 0 e 1, e la loro molteplicitè dipende dal paramentro α: la molteplicitè algebrica di 0 è sempre almeno 1, e la molteplicitè algebrica di 1 è sempre almeno 2. Conviene calcolare la molteplicitè geometrica di 1 e 0, al variare di α: infatti, se $\alpha \neq 0, 1$ esso ha sempre molteplicitè geometrica 1, in quanto la sua molteplicitè algebrica è 1. Si procederè con l'eliminazione di Gauss.
Eseguendo l'eliminazione sulla matrice A_α, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 3\alpha+2 & 0 & -2\alpha-2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 3\alpha+2 & 0 & -2\alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da ciò si nota che 0 ha sempre molteplicitè geometrica 1, a meno che α non sia 0: in tal caso, ha molteplicitè geometrica 2. Si esegua il conto su $A_\alpha - I$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \alpha-1 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nota quindi che 1 ha sempre molteplicitè geometrica 1, a meno che non sia $\alpha = -1$: in tal caso vi sono solo due pivot, e il rango di $A_{-1} - I$ è 2, da cui la molteplicitè geometrica di 1 vale 4-2=2. La matrice ha come condizione necessaria per la diagonalizzabilitè $\alpha = -1$: dato che per tale valore le molteplicitè geometriche e quelle algebriche degli autovalori -1,1,0 coincidono sempre, tale condizione è anche sufficiente per la diagonalizzabilitè.

b) Come discusso nel precedente caso, per $\alpha = 1$ la matrice è solo triangolabile (è triangolabile $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, in quanto le radici del polinomio caratteristico sono sempre reali). 1 e 0 hanno molteplicitè geometrica 1, quindi si può costruire una base a bandiera usando come primi vettori un autovettore per 0 ed un autovettore per 1. Risolvendo i sistemi lineari con i passaggi giè esplicitati, si nota che una base di $\operatorname{Ker} A_1$ è data da

$$v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre una base di $\operatorname{Ker}(A_1 - I)$ è data da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nella base $\{v_0, v_1, e_3, e_4\}$ (supponendo che la base di partenza fosse la base canonica) la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è per coincidenza in forma giè triangolare, da cui la base espressa è una base a bandiera per A_1, senza dover cambiare gli ultimi vettori della base.

Esercizio 3

a) Per definizione dell'insieme, esiste una base in cui la matrice associata a b è una matrice simmetrica in cui gli elementi sulla diagonale sono tutti nulli. Affinché $\operatorname{rk} b = 1$, non devono esistere minori nella matrice associata di determinante non nullo e ordine maggiore di uno: ma data la simmetria della matrice ciò è impossibile. Infatti, considerando la generica matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & ... \\ a & 0 & c & ... \\ b & c & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

è necessario, affinché il rango del prodotto scalare non sia zero, che vi sia almeno un elemento nella matrice non nullo: ma se è non nullo l'elemento a_{ij}, è uguale ad esso l'elemento a_{ji}: il minore formato dall'$i-$esima e j-esima riga e colonna ha forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-a_{ij}a_{ji} = -a_{ij}^2$: se vi è quindi un elemento non nullo il rango del prodotto scalare è almeno due, se vi sono solo elementi nulli il rango del prodotto scalare è sicuramente 0.

b) Come nel caso precedente, si nota che la restrizione allo spazio generato dall'$i-$esimo e dallo $j-$esimo vettore della base ha determinante minore o uguale a zero: se avesse determinante strettamente minore di zero, allora la restrizione del prodotto scalare a tale spazio avrebbe segnatura $(1, 1, 0)$, il che è impossibile in quanto il prodotto scalare è semidefinito. Allora tutti gli a_{ij} devono essere nulli, da cui l'unico prodotto scalare con base formata da vettori isotropi semidefinito è il prodotto scalare nullo.

c) Ovviamente, $0 \in I(V)$ in quanto tutti i vettori sono isotropi per tale prodotto scalare. Sia $b_1 \in I(V)$ con v_1, w_1 vettori linearmente indipendenti isotropi per b_1, e sia $b_2 \in I(V)$ con v_2, w_2 vettori linearmente indipendenti isotropi per b_2. Sicuramente $\alpha b_1 \in I(V)$ in quanto $(\alpha b_1)(v_1, v_1) = \alpha b_1(v_1, v_1) = 0$ e analogo per w_1, quindi i vettori formano ancora base di vettori isotropi e $I(V)$ è chiuso per prodotto per scalari. Bisogna vedere se esistono dei vettori $v, w \in V$ linearmente indipendenti tali da essere isotropi per $b_1 + b_2$. Si consideri il caso in cui entrambi i prodotti scalari siano non degeneri: infatti, se uno dei due è degenere, allora è necessariamente nullo (in quanto l'indice di nullitè è almeno 1, da cui potrebbe essere $i_+ = 1$ o $i_- = 1$: ma in questi casi il prodotto è semidefinito, quindi nullo per la tesi provata precedentemente) e basta considerare la base formata da vettori isotropi per l'altro prodotto scalare per ottenere la tesi. Se tutti e due i prodotti scalari sono non degeneri, allora hanno tutti e due segnatura (1,-1,0) (in quanto prodotti scalari definiti non ammettono vettori isotropi). Si consideri una base isotropa per il primo prodotto scalare: in tale base, le matrici associate ai prodotti scalari saranno della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

per b_1 e

$$\begin{pmatrix} b & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

per b_2, con la condizione $bc - d^2 < 0$: allora il prodotto scalare somma sarà rappresentato in questa base dalla matrice

$$\begin{pmatrix} b & a+d \\ a+d & c \end{pmatrix}$$

e avrà determinante $bc - (a+d)^2 = bc - a^2 - d^2 - 2ad$. Anche rispettando la condizione $bc - d^2 < 0$, esistono valori di a, b, c, d tali che tale determinante è maggiore di zero (quindi il prodotto scalare è completamente definito e privo di vettori isotropi): ad esempio, se $(b, c, d) = (1, 1, 3)$, si ha $1 - 9 = -8 < 0$ ($b_2 \in I(V)$, in quanto prodotti scalari di segnatura (1,-1,0) ammettono sempre una base di vettori isotropi: per provare questo fatto, basta pensare che qualsiasi prodotto scalare di tale segnatura è rappresentabile in una base dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e i vettori di coordinate (1,1) e (1,-1) rispetto a tale base sono isotropi e linearmente indipendenti, quindi formano una base isotropa per tale prodotto scalare), il determinante del prodotto scalare somma vale $-a^2 - 6a - 8$: la disequazione $-a^2 - 6a - 8 > 0$ è equivalente alla disequazione $a^2 + 6a + 8 < 0$, e il discriminante di tale equazione di secondo grado vale 36-32=4, da cui esistono valori di a per cui il prodotto scalare somma è rappresentato da una matrice a determinante positivo, quindi completamente definita e senza vettori isotropi (come ad esempio il valore $a = -3$, per il quale il determinante della somma vale 1): $I(V)$ non è un sottospazio vettoriale dei prodotti scalari su V nel caso $n = 2$, in quanto non è chiuso rispetto all'operazione di somma sui prodotti per scalari ad esso appartenenti.

d) Basta trovare una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta un prodotto scalare in una base composta da vettori isotropi (quindi appartenente ad $I(V)$, imponendo che essa abbia rango massimo: tale matrice ha determinante $2abc$, quindi se si scelgono coefficienti non nulli (ad esempio, $a = b = c = 1$) la matrice rappresenta un prodotto scalare di $I(V)$ non degenere.

2.9 14.01.2009

Esercizio 1
L'endomorfismo nullo appartiene a E, in quanto l'autospazio di 0 per l'endomorfismo nullo coincide con lo spazio V, che contiene W. Siano $f, g \in E$: allora $\exists \lambda_f$ e λ_g tali che $W \subseteq V(\lambda_f, f) \wedge W \subseteq V(\lambda_g, g)$. Si consideri quindi l'endomorfismo $\rho f + \mu g$: applicando tale endomorfismo a $w \in W$, si ottiene $(\rho f + \mu g)(w) = \rho f(w) + \mu g(w) = \rho \lambda_f w + \mu \lambda_g w = (\rho \lambda_f + \mu \lambda_g) w$, da cui $W \subseteq V(\rho \lambda_f + \mu \lambda_g,\ \rho f + \mu g)$ e quindi $\rho f + \mu g \in E$. Per calcolare la dimensione di E, si calcolerè la dimensione dello spazio delle matrici associate agli endomorfismi di E nella base $\mathcal{B}$ di V che ha come primi p vettori una base di W e come restanti $n - p$ vettori un completamento qualsiasi a base di V della base di W precedente: essendo i due spazi isomorfi, hanno la stessa dimensione. La matrice associata ad un qualsiasi elemento di E in tale base sarà della forma

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

Una base dello spazio delle matrici di tale forma contiene quindi un elemento per generare il primo blocco (λI_p), $(n-p)p$ elementi per generare il secondo blocco (A) e $(n-p)(n-p)$ elementi per generare il quarto blocco (B). Allora la dimensione dello spazio è

$$1 + (n-p)p + (n-p)^2 = 1 + np - p^2 + n^2 + p^2 - 2np = 1 + np + n^2$$

Esercizio 2

1. Le coordinate cartesiane sono date dal seguente sistema (dando alle coordinate nome (x,y,z,t)):

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ \\ -3y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

2. Si scriva la matrice associata ad f_h nelle basi canoniche degli spazi. La matrice associata è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f_h) = \begin{pmatrix} h & h & 2h \\ -h & 0 & -3 \\ h & h & 2 \\ 2h & 2h & 2+2h \end{pmatrix}$$

   Si usi il metodo delle eliminazioni di Gauss per determinare la dimensione dell'immagine:

$$\begin{pmatrix} h & h & 2h \\ -h & 0 & -3 \\ h & h & 2 \\ 2h & 2h & 2+2h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} h & h & 2h \\ 0 & h & 2h-3 \\ 0 & 0 & 2h-2 \\ 0 & 0 & 2-3h \end{pmatrix}$$

   Si ha quindi la dimensione dell'immagine dal numero dei pivot: per $h \neq 0, 1, \frac{2}{3}$ la dimensione è 3, per $h = 1,\ \frac{2}{3}$ la dimensione è 2, per $h = 0$ la dimensione vale 1.

3. Deve essere necessariamente $\dim \operatorname{Im} f_h \leq dimW = 2$: condizione necessaria è quindi che h sia uguale a 0, $\frac{2}{3}$ oppure 1. Nel caso $h = 0$ la dimensione dell'immagine è 1, e la terza colonna genera l'intera immagine: basta quindi controllare se il sistema seguente ammette soluzione.

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right|$$

   Il sistema ammette la soluzione $a = 1, b = 1$: $\operatorname{Im} f_0 \subseteq W$. Si esegua adesso il controllo negli altri due casi: stavolta l'immagine di f_h è generata dalle ultime due colonne, quindi verrè eseguito il conto con le lettere. Per la seconda colonna:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & h \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2h \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & h \\ 0 & -3 & h \\ 0 & -1 & h \\ 0 & 2 & 2h \end{array}\right.$$

Tale sistema non ha mai soluzione se h non vale 0: allora la seconda colonna non è mai nello span dei vettori assegnati, quindi l'unico valore di h tale che $\operatorname{Im} f_h \subseteq W$ è 0.

4. Si usi la formula di Grassmann: $\dim(A\cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cup B)$. $\operatorname{Im} f_2$, come calcolato, ha dimensione 3: se B avesse dimensione 3, dato che $\operatorname{Im} f_2$ ha dimensione 3 e la massima dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ è 4, non si potrebbe avere $\dim(\operatorname{Im} f_h \cap \operatorname{Im} f_2) = 1$, come richiesto. Ci si restringe quindi ai casi precedenti, in cui $\dim \operatorname{Im} f_h \leq 2$. Bisogna quindi calcolare la dimensione dell'unione. Come notato in precedenza, le ultime due colonne generano $\operatorname{Im} f_h$ nei casi considerati (e, se $h = 0$, basta inserire l'ultima colonna). Si controlli quindi se la matrice ottenuta accostando le colonne di $\operatorname{Im} f_2$ e le colonne di $\operatorname{Im} f_h$ ha rango massimo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & h & 2h \\ -2 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & h & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2h & 2+h \end{pmatrix}$$

Il minore formato dalle prime 3 colonne e l'ultima ha determinante $-8(h-2)$, che è sempre non nullo nei casi considerati: quindi se $h = 0, \frac{2}{3}, 1$ la dimensione di $\operatorname{Im} f_h \cup \operatorname{Im} f_2$ è 4 e, per Grassmann, la dimensione di $\operatorname{Im} f_h \cap \operatorname{Im} f_2$ è 1.

Esercizio 3

1. Si calcoli il polinomio caratteristico di A, calcolando $\det(A-\lambda I)$. Tale polinomio vale $-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda$, da cui gli autovalori valgono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$. Rimane quindi da controllare soltanto la molteplicitè geometrica di 1, calcolando il rango di $A - I$ attraverso Gauss, procedimento da usare per trovare anche una base di $\operatorname{Ker}(A - I)$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione del nucleo è 2, uguale alla molteplicitè algebrica dell'autovalore 1: la matrice è diagonalizzabile. L'autospazio relativo all'autovalore 1 ha equazione cartesiana $x - z = 0$ mentre l'autospazio relativo all'autovalore 0, coincidente col nucleo di A, è dato dal seguente calcolo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il nucleo ha dimensione 1 (come prevedibile), ed è generato dal vettore $(1, -1, 2)$, da cui equazioni cartesiane del sottospazio sono $2x - z = 0$ e $2y + z = 0$.

2. Si userè il fatto che due matrici sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se $AB_k = B_kA$, sotto la condizione che anche B_k sia diagonalizzabile. Verranno prima trovati i k per cui vi è commutazione:

$$AB_k = \begin{pmatrix} k & k & 1-k \\ 1-k & 1-k & k-1 \\ k & k & 1-k \end{pmatrix}$$

$$B_kA = \begin{pmatrix} 2-k & k & k-1 \\ k-1 & 1-k & 1-k \\ -k+2 & k & k-1 \end{pmatrix}$$

Si ha che $AB = BA$ se e solo se $k = 1$. Bisogna quindi dimostrare che B_1 è diagonalizzabile. Il suo polinomio caratteristico vale $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$, da cui $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$. Si controlli la dimensione di $\operatorname{Ker}(B_1 - I)$:

$$B_1 - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker}(B_1 - I)$ ha dimensione 2, da cui B_1 è diagonalizzabile, e A e B_1 ammettono base comune di autovettori.

Esercizio 4

Sia r_f il rango di f. Per il teorema spettrale, esiste una base $\mathcal{B}$ di autovettori per f ortonormali per Φ: si permutino i vettori della base in maniera da avere la matrice associata M ad f in tale base della forma

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

con D diagonale. La somma di due endomorfismi simmetrici è un endomorfismo simmetrico: se, in tale base, la matrice associata a g è simmetrica (in particolare, diagonale), l'endomorfismo $f+g$ è simmetrico. Sia r il rango voluto: basterè che la matrice risultante dalla somma delle matrici abbia solo r pivots, il che è sempre possibile: ad esempio basta prendere g come l'endomorfismo rappresentato in tale base dalla matrice

$$H = \left(\begin{array}{c|c} -D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

con I_r matrice identità di taglia r: l'endomorfismo $f + g$ sarà rappresentato in tale base dalla matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

che è simmetrica in una base ortonormale per Φ ed ha rango r: $f + g$ ha le proprietà volute.

2.10 10.06.2009

Esercizio 1

1. Sia $v \in$ Ker $f^h \cap$ Im f^k: allora, per provare la prima inclusione, bisogna dimostrare che $\exists w \in$ Ker $f^{h+k} | f^k(w) = v$. Per ipotesi, $v \in$ Im f^k: allora sicuramente $\exists z \in V | f^k(z) = v$. Ora, applicando a destra e a sinistra dell'uguaglianza f^h, si ha $f^{k+h}(z) = f^h(v) = 0$, in quanto $v \in$ Ker f^h: allora $z \in$ Ker f^{k+h} e $f^k(z) = v$, da cui z è il vettore w cercato e $v \in f^k$(Ker f^{k+h}), da cui Ker $f^h \cap$ Im $f^k \subseteq f^k$(Ker f^{k+h}). Per provare la seconda inclusione, sia $v \in f^k$(Ker f^{k+h}): allora, dato che Ker f^{k+h} è non vuoto (in quanto contiene almeno lo zero), $v \in$ Im f^k: ora, sia $w \in$ Ker $f^{k+h} | f^k(w) = v$: applicando a destra e sinistra f^h, si ha $f^h(v) = f^{k+h}(w) = 0$, in quanto $w \in$ Ker f^{k+h}. $v \in$ Ker f^h, da cui è provata anche la seconda inclusione: è allora provata l'uguaglianza degli insiemi.

2. Per la precedente tesi, i due spazi sono effettivamente in somma diretta, in quanto la loro intersezione (che coincide con f^k(Ker f^{k+h})) è costituita dal solo vettore nullo. Si sfrutta il seguente risultato: $\forall i$, Im $f^i \supset$ Im f^{i+1}, da cui per induzione $\forall h \geq k$, Im $f^h \subset$ Im f^k. In questa maniera, la tesi si riduce a dimostrare che V=Ker $f^h \oplus$ Im f^h: ciò è vero in quanto f^h è un endomorfismo, e per ogni endomorfismo g su V si ha che dim Im g + dim Ker g= dim V: dato che gli spazi sono in somma diretta, la tesi è verificata.

3. Si nota dapprima che la richiesta che f^k(Ker f^{k+h})=$\{0\}$ coincide con Ker $f^k \subset$ Ker f^{k+h}: dato che $k + h > k$, si ha anche l'inclusione inversa, da cui deve essere Ker f^{k+h} = Ker f^k. Si consideri $V = \mathbb{R}^4$. La maniera più semplice di esibire un tale esempio è quella di trovare un'applicazione lineare che rispetti le ipotesi del punto 2 (con $h = k = 2$), abbia dimensione di Ker f^2=2 e dimensione di Im f^2=2. Si consideri l'applicazione f rappresentata, in base canonica, da tale matrice:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
f ha nucleo di dimensione 1, ed è in forma diagonale a blocchi: il primo blocco diagonale 2x2 è nilpotente, mentre il secondo è l'identità. Un banale conto dimostra che
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ed inoltre, $\forall i \geq 2$, $M^i = M^2$. Quindi Ker f^2=Ker f^4, e tutte le ipotesi sono rispettate. Inoltre, si nota che una base del kernel di f^2 è dato dai primi 2 vettori della base canonica, mentre una base per Im f^2 è data dagli ultimi 2, da cui la tesi è anche osservabile in maniera diretta.

Esercizio 2
Si calcoli la traccia di ogni matrice. Si ha tr(A)=tr(B)=2, tr(C)=tr(D)=3: le uniche coppie di matrici simili possono essere A, B oppure C, D dato che la traccia è invariante per similitudine. D ha due righe uguali (la prima e la terza), mentre C ha rango massimo (basta effettuare una riduzione a scala): C e D non sono simili. Dal calcolo del determinante, det(A)=-2, det(B)=-1: A e B non sono simili. Non esistono quindi coppie di matrici simili.

Esercizio 3

1. Si verifichi dapprima la simmetria. Se $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j x^j$ si ha (dato che A commuta con se stessa) $p(A)q(A) = q(A)p(A)$, da cui la simmetria è verificata. Si verifichi ora la linearità a sinistra: ciò discende dalla linearità della traccia, in quanto $\forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$, tr($A + B$)=tr($A$)+tr($B$) e, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tr($\lambda A$)=$\lambda$tr($A$): allora, se p, g, h sono polinomi nell'insieme esaminato e λ, μ sono scalari reali qualsiasi, $\psi_A(\lambda p + \mu h, g)$=tr(($\lambda p(A) + \mu h(A))g(A)$)=tr($\lambda p(A)g(A)$)+ tr($\mu h(A)g(A)$)=$\lambda$ tr($p(A)g(A)$)+μ tr($h(A)g(A)$)=$\lambda\psi_A(p, g)$+$\mu\psi_A(h, g)$, da cui la linearità a sinistra è provata: per simmetria è provata anche la linearità a destra, da cui l'applicazione è un prodotto scalare.

2. Se A, B sono simili, allora hanno la stessa traccia, ed inoltre $\forall i \in \mathbb{N}$ tr(A^i)=tr(B^i), in quanto anche le matrici A^i e B^i sono simili. In particolare, per ogni polinomio h di grado qualsiasi m tr$(h(A))$=tr$(\sum_{i=0}^{m} a_i A^i)$=$\sum_{i=0}^{m} a_i$ tr(A^i)=$\sum_{i=0}^{m} a_i$ tr(B^i)=tr$(h(B))$: dato che se p, g sono polinomi di grado k pg è un polinomio di grado $2k$, la tesi discende dall'osservazione precedente: $\forall p, g \in \mathbb{R}_k[x]$ tr$(p(A)g(A))$=tr$(p(B)g(B))$ e la tesi è provata.

3. A è simile ad una matrice diagonale D, con i suoi autovalori λ_i distinti sulla diagonale. Quando si effettua quindi il prodotto scalare $\psi_A(p, p)$, si può effettuare il prodotto scalare $\psi_D(p, p)$. In tale forma, la matrice $p(D)$ è una matrice diagonale, dove in posizione ii vi è il polinomio $p(x)$ valutato in λ_i. La matrice $p^2(D)$ ha sulla diagonale il polinomio $p^2(x)$ valutato in λ_i: il polinomio $p^2(x)$ ha al massimo k radici distinte (se, ad esempio, il polinomio $p(x)$ ha k radici distinte (quindi di molteplicità 1 per il teorema fondamentale dell'algebra), il polinomio $p^2(x)$ ha k radici distinte di molteplicità 2). Si ha che $\psi_D(p, p)$=$\sum_{i=0}^{n} p^2(\lambda_i)$: i termini della somma sono positivi o nulli. Dato che tra gli autovalori λ_i ve ne sono più di k distinti (nel caso in esame n autovalori distinti con $n > k$) e il polinomio $p^2(x)$ ha al massimo k radici distinte, tra i termini della somma ve ne è almeno uno non nullo, ed inoltre sono tutti maggiori o uguali a 0: la somma è quindi positiva, da cui si può dire che $\forall p \in \mathbb{R}_k[x]$ $\psi_D(p, p) = \psi_A(p, p) > 0$, da cui il prodotto scalare ψ_D è definito positivo, e quindi anche il prodotto scalare ψ_A.

2.11 5.07.2010

Esercizio 1

1. Risolvendo il sistema
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z-2t=0 \end{cases}$$
otteniamo una base di Z. In particolare, si ottiene (omettiamo i calcoli) $Z = \mathrm{Span}((1,-2,1,0),(2,-2,0,1))$. Dato che, dalla formula delle dimensioni, $\dim\ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = 4$ e $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$, segue che $V = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$ e $\dim \ker f = 2$. Visto che $Z = \mathrm{Im}\, f$, fissiamo $v_1 = (1,-2,1,0), v_2 = (2,-2,0,1)$ come base di $\mathrm{Im}\, f$. Completiamo $\{v_1, v_2\}$ a base di $\mathbb{R}^4$ con i vettori e_1, e_2 (la verifica dell'indipendenza lineare va fatta verificando che il determinante della matrice delle coordinate sia diverso da zero). Dunque automaticamente $\{e_1, e_2\}$ è una base di $\ker f$. Ora è sufficiente notare che, essendo nucleo e immagine disgiunti, $f(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Im}\, f$, cioè l'immagine è f-invariante. Allora per costruire una applicazione f che soddisfa le richieste del testo, ci basta definire le immagini dei vettori della base che abbiamo fissato nel seguente modo:
$$\begin{aligned} f(v_1) &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ f(v_2) &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \\ f(e_1) &= 0 \\ f(e_2) &= 0 \end{aligned}$$
In particolare, dato che non abbiamo ulteriori condizioni, possiamo prendere $\alpha_1 = \beta_2 = 1, \alpha_2 = \beta_1 = 0$. Allora l'applicazione f, associata nella base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^4$ (in partenza ed in arrivo) alla matrice
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
verifica le richieste del testo.

2. Dall'esercizio precedente notiamo innanzitutto che anche in questo caso $V = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

   (a) $\mathrm{rk}\, f = p \implies \dim \mathrm{Im}\, f = p$. Dato che nucleo ed immagine di f sono disgiunti, segue che $\mathrm{Im}\, f$ è f-invariante, in particolare $f|_{\mathrm{Im}\, f}$ è iniettiva, e lo rimane per qualunque applicazione successiva di f. Da ciò segue che $W = \mathrm{Im}\, f$ è un sottospazio con le caratteristiche richieste.

   (b) Sia $\{v_1, \dots, v_p\}$ una base di $\mathrm{Im}\, f$. Dato che $\mathrm{Im}\, f$ è invariante, se $0 < r \le p$, presi comunque r vettori $v_1, \dots, v_r$ dai vettori di base di $\mathrm{Im}\, f$, il sottospazio $Z = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)$ soddisfa le condizioni richieste. Per $r > p$ si perde l'iniettività in quanto dovrò scegliere fra gli r vettori di base di Z almeno uno appartenente a $\ker f$. Quindi la condizione che otteniamo è $0 < r \le p$.

2.12 07.07.2009

Esercizio 1
Il polinomio caratteristico della matrice, ottenuto calcolando il determinante di $A - \lambda I$, vale $\lambda(\lambda-2)^3$: gli autovalori sono quindi 0 (di molteplicitè algebrica 1 e quindi di molteplicitè geometrica 1) e 2 (di molteplicitè algebrica 3). Una base del nucleo di A (autospazio per l'autovalore 0) si trova tramite l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

Il vettore

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è autovettore relativo all'autovalore 0. Si proceda analogamente per il secondo autovalore, calcolando una base di Ker $(A - 2I)$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

L'autovalore 2 ha molteplicitè geometrica 1, e A non è diagonalizzabile. Il vettore

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è autovettore relativo all'autovalore 2. Nella base di $\mathbb{R}^4$ $\{v_0, v_2, e_2, e_4\}$, la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bisogna quindi cambiare gli ultimi due vettori. Ci si ponga nello spazio generato dai vettori e_2, e_4: l'applicazione lineare ristretta a tale Span ha matrice associata

$$A_{e_2,e_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha come autovalore 2, di molteplicitè algebrica 2 ed autovettore

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

scegliendo e_4 come terzo vettore di base e completando con un qualsiasi vettore si ha una base a bandiera (si può ad esempio completare con e_2.

Esercizio 2

1) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $z, w \in V$: allora, dato che φ_f è per ipotesi prodotto scalare, $\forall v \in V$ $\varphi_f(v, \alpha z + \beta w) = \alpha\varphi_f(v, z) + \beta\varphi_f(v, w)$: per definizione di φ_f si ha quindi $\varphi(v, f(\alpha z + \beta w)) = \alpha\varphi(v, f(z)) + \beta\varphi(v, f(w)) = \varphi(v, \alpha f(w) + \beta f(z))$: dato che l'uguaglianza è valida $\forall v \in V$ e il prodotto scalare

φ è non degenere, si ha $f(\alpha z + \beta w) = \alpha f(z) + \beta f(w)$, da cui f è lineare. Conviene notare un fatto anche per i punti successivi: se A è la matrice associata al prodotto scalare φ in una certa base e B è la matrice associata ad f nella stessa base, la matrice associata a φ_f in tale base sarà AB, in quanto $\varphi_f(v,w) = \varphi(v, f(w)) = [v]AB[w]$ (dove $[v]$ indica il vettore delle coordinate di v rispetto alla base scelta). Se φ è definito positivo, per il teorema di Sylvester esiste una base in cui la matrice associata a φ è la matrice identitè: allora la matrice associata al prodotto scalare φ_f in tale base coincide con la matrice associata all'applicazione f in tale base: dato che φ_f è prodotto scalare, la matrice ad esso associata è simmetrica, da cui nella base ortonormale di Sylvester per φ f è rappresentato da una matrice simmetrica, ed è quindi un endomorfismo simmetrico rispetto a φ.

2) $\Leftarrow$: sia f iniettiva: allora la matrice ad esso associata in qualsiasi base è di rango massimo. Per il teorema di Sylvester, data la segnatura $(h,k,0)$ di φ non degenere (con $h+k=n$ dimensione dello spazio), esiste una base in cui la matrice associata a φ è

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & -I_k \end{array}\right)$$

dato che al prodotto scalare φ_f è associata la matrice AB, con B matrice associata ad f in tale base, e dato che sia A che B sono di rango massimo, ne segue che AB è di rango massimo e φ_f è non degenere. $\Rightarrow$: Analogamente a prima e con le stesse notazioni, AB è di rango massimo $\Leftrightarrow$ A e B sono di rango massimo: dato che AB è di rango massimo per ipotesi, f è un endomorfismo rappresentato da una matrice di rango massimo, ed è quindi iniettivo.

3) La matrice associata a φ_f coincide col prodotto di AB, ed ha quindi il rango minimo tra le due matrici: dato che il rango di B è per ipotesi 1 e A ha rango massimo, la matrice AB avrà sempre rango uno, da cui la richiesta non può essere soddisfatta.

4) Ci si ponga nella base canonica. Lo spazio indicato è generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dato che $(1,0,0)$ deve essere un vettore isotropo, sicuramente f non avrà rango massimo, e dato che φ è definita positiva, f è simmetrico, rappresentato in base canonica da una matrice simmetrica. Dato che la matrice associata a φ è I, la matrice associata ad f e quella a φ_f coincidono, quindi si può lavorare su tale matrice (chiamata B) interpretandola sia come associata all'endomorfismo che come associata al prodotto scalare. Imponendo l'isotropia di e_1, la matrice associata deve essere della forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & c & d \\ b & d & e \end{pmatrix}$$

Si impongano ora le condizioni di ortogonalitè: e_1 deve essere ortogonale all'altro generatore del sottospazio, il che dè la condizione $a = 0$. Imponendo le condizioni di ortogonalitè su $(1,1,0)$, si ottiene dal prodotto scalare col primo vettore $a = 0$ (condizione giè richiesta), mentre dal prodotto scalare col secondo vettore si ottiene la condizione $2a + 2c + b + d = 0$. così scegliendo i coefficienti della matrice, si ottiene che $W \subseteq \operatorname{Span}((1,0,0),(1,1,0))^{\perp}$: la coincidenza dei due sottospazi si ha imponendo che lo Span non sia ortogonale a tutto lo spazio (deve esistere un vettore non ortogonale ai due generatori dello Span), in quanto ciò implica che $\dim \operatorname{Span}((1,0,0),(1,1,0))^{\perp} = 2$: ciò si ha banalmente ponendo $b \neq 0$. In definitiva, l'applicazione lineare f rappresentata in base canonica dalla matrice (ottenuta con $(a,b,c,d,e) = (0,1,0,-1,0)$)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa le richieste.

Esercizio 3

1) $f(Z)$ è un sottospazio vettoriale di W, contenuto in $\operatorname{Im} f$. Dalla formula delle dimensioni, $\dim Z = dim\operatorname{Im} f_{|Z} + \dim \operatorname{Ker} f_{|Z}$. Dato che $\operatorname{Im} f_{|Z} = f(Z)$, si può riscrivere $\dim f(Z) = \dim Z - \dim \operatorname{Ker} f_{|Z}$. Si noti ora che $\operatorname{Ker} f_{|Z} \subseteq \operatorname{Ker} f$: infatti, se un vettore z appartiene al nucleo di $f_{|Z}$, tale vettore appartiene anche a V, ed è tale che $f_{|Z}(z) = f(z) = 0$, da cui $z \in \operatorname{Ker} f$: allora $\dim \operatorname{Ker} f \geq \dim \operatorname{Ker} f_{|Z}$, e l'eguaglianza si trasforma in $\dim f(Z) \geq \dim Z - \dim \operatorname{Ker} f$: l'affermazione è quindi vera.

2) $\Rightarrow$: ovvia: data l'eguaglianza, tutti i vettori dell'immagine di h sono ottenibili dall'applicazione di f a vettori di F nell'immagine di L: quindi l'immagine di h è compresa nell'immagine di f. $\Leftarrow$: si considerino i vettori $v_1, ..., v_n \in F$ tali che $f(v_1), ...f(v_n)$ è base dell'immagine di f. Si considerino i vettori $w_1, ..., w_m \in H$ tali che $h(w_1), ..., h(w_m)$ sono base dell'immagine di h. Naturalmente $m \leq n$, e i vettori $h(w_i)$ sono ottenibili come combinazioni lineari dei vettori $f(v_i)$. Si ha che $f_{|\operatorname{Span}(v_i)}$ è invertibile, quindi $\forall h(w_i) \exists z_i \in F$ tale che $f(z_i) = h(w_i)$. Si consideri una base di H costituita dai w_i uniti ad un eventuale completamento a base formato da una base del nucleo di h. L'applicazione L definita da $L(w_i) = z_i$ per $i \leq m$ e che è nulla su eventuali altri vettori della base è tale che $f \circ L(w_i) = f(z_i) = h(w_i)$ se i è tra 1 ed m, ed è nulla sugli altri vettori della base, da cui $f \circ L = h$. Tutte e due le implicazioni sono corrette e l'affermazione è vera.

3) Sia $V = \mathbb{R}^2$, f, g endomorfismi rappresentati rispettivamente dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Come si verifica banalmente, $f, g \in E$. $f + g$ è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che al quadrato dè l'identitè: quindi $f + g \notin E$, ed E non è chiuso rispetto alla somma, da cui non è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$: l'affermazione è falsa.

2.13 3.02.2011

Esercizio 1
Risolvendo i sistemi lineari

$$\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ y=y \\ z=z \\ t=t \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+6y+3z+2t=0 \\ y=y \\ z=z \\ t=t \end{cases}$$

Troviamo i generatori dei sottospazi U e V, ossia

$$U = \mathrm{Span}((2,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1))$$

$$V = \mathrm{Span}((2,-1,0,0),(2,0,-3,0),(2,0,-3,0))$$

Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

che hanno come colonne le coordinate dei generatori rispettivamente di U di V. Esse hanno entrambe rango massimo 3, dunque i vettori che generano U e quelli che generano V sono linearmente indipendenti e costituiscono ognuna una base del rispettivo sottospazio. Quindi possiamo concludere che $\dim U = \dim V = 3$. Risolvendo quindi il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ \\ 3x+6y+2z+2t=0 \end{cases}$$

otteniamo i vettori che generano $U \cap V$, cioè

$$U \cap V = \mathrm{Span}((2,-1,0,0),(0,0,-1,1))$$

Si verifica facilmente che i vettori che generano $U \cap V$ sono linearmente indipendenti, e dunque costituiscono una base di $U \cap V$ e pertanto $\dim(U \cap V) = 2$. Siano adesso

$$v_1 = (2,-1,0,0) \qquad v_2 = (0,0,-1,1)$$

I vettori $\{v_1, v_2\}$ sono una base di $\mathrm{Ker}\, f$. Completiamola a $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base di $\mathbb{R}^4$ con i vettori

$$v_3 = (1,0,0,0) \qquad v_4 = (0,0,0,1)$$

poiché

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

i quattro vettori sono effettivamente linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$. Definiamo adesso i trasformati dei vettori della base che abbiamo fissato attraverso l'applicazione f, scegliendo in arrivo la base canonica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$f(v_1) = (0,0,0,0), \qquad f(v_2) = (0,0,0,0)$$

$$f(v_3) = (3,6,\alpha,2), \qquad f(v_4) = (1,0,0,0)$$

Adesso, posto

$$w = (1,-1,-1,1)$$

Dobbiamo imporre che $f(w) \in V^\perp$. Per far ciò scriviamo le coordinate di w rispetto alla base $\mathcal{B}$, risolvendo il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Da cui si ricava $w = v_1 + v_2 - v_3$. Dalla linearitè dell'applicazione f segue che

$$f(w) = f(v_1 + v_2 - v_3) = f(v_1) + f(v_2) - f(v_3) = -f(v_3)$$

in quanto $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f$. Pertanto dobbiamo imporre che $-f(v_3) \in V^\perp$, cioè che $\forall v \in V \langle -f(v_1), v\rangle = 0$, ossia, per bilinearitè e semplificando il -1, $\langle f(v_1), v\rangle = 0 \forall v \in V$. A tal scopo, scriviamo un generico vettore di V nella forma

$$\beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta + 2\gamma + 2\delta \\ -\beta \\ -\gamma \\ -3\delta \end{pmatrix}$$

e imponiamo che il prodotto scalare con v_1 sia nullo $\forall \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, ossia

$$(3, 6, \alpha, 2) \begin{pmatrix} 2\beta + 2\gamma + 2\delta \\ -\beta \\ -\gamma \\ -3\delta \end{pmatrix} = 0$$

svolgendo il prodotto ricaviamo l'equazione

$$6\beta + 6\gamma + 6\delta - 6\beta - 3\alpha\gamma - 6\delta = 0$$

cioè

$$(6 - 3\alpha)\gamma = 0$$

poiché l'uguaglianza deve essere valida per ogni γ, dovrè essere $6 - 3\alpha = 0$ da cui $\alpha = 2$. Dunque un'applicazione lineare che soddisfa le richieste del problema esiste per $\alpha = 2$.

Esercizio 2

1. Consideriamo la restrizione di f al sottospazio U. poiché $f(U) = W$, sarà $f|_U : U \to W$. Dimostriamo che $f|_U$ è un isomorfismo. Per ipotesi, è lineare. Inoltre, poiché $\dim U = \dim W = 2$ si ha che $f|_U$ è iniettiva se e solo se è surgettiva, dunque basta dimostrare che è surgettiva: infatti, poiché $f(U) = W$, si evince che $\operatorname{Im} f|_U = W$ e dunque f risulterè surgettiva e iniettiva, dunque un isomorfismo. Sia $\{u_1, u_2\}$ una base di U. poiché $f|_U$ è un isomorfismo, manda basi in basi, dunque $\{f(u_1), f(u_2)\}$ costituiranno una base di W. In piè, poiché $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, allora $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, f(u_1), f(u_2)\}$ saranno una base di $\mathbb{R}^4$. I trasformati dei vettori di $\mathcal{B}$ tramite f saranno $\{f(u_1), f(u_2), u_1, u_2\}$. Allora, la matrice associata a f nella base $\mathcal{B}$ sarà

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

2. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = t^4 - 2t + 1$$

3. Sia $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, f(u_1), f(u_2)\}$ la base di $\mathbb{R}^4$ trovata al punto 1. Siano $L_1 = \mathrm{Span}(u_1, f(u_1))$ e $L_2 = \mathrm{Span}(u_2, f(u_2))$. I vettori che generano L_1 e L_2 sono indipendenti, dunque $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$, allora $\forall v \in L_1$ e $\forall w \in L_2$ esistono unici $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tali che $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 f(u_1)$ e $w = \beta_1 u_2 + \beta_2 f(u_2)$ e si ha

$$f(v) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 f(u_1)) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f^2(u_1) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 u_1 \in L_1$$

$$f(w) = f(\beta_1 u_2 + \beta_2 f(u_2)) = \beta_1 f(u_2) + \beta_2 f^2(u_2) = \beta_1 f(u_2) + \beta_2 u_2 \in L_2$$

dunque i sottospazi L_1, L_2 sono f-invarianti.

4. poiché $f^2 = id$, se $\mathcal{S}$ esiste, e $B = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(f)$, dovrè risultare $B^2 = I$. Dunque si ha

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

poiché $B^2 \neq I$, allora la base $\mathcal{S}$ non può esistere.

Esercizio 3

1. Sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonica di $V = \mathbb{R}_3[x]$, scrivo la matrice associata a b nella base $\mathcal{B}$:

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare una base del radicale di (V, b), bisogna risolvere il sistema lineare $AX = 0, X \in \mathbb{R}^4$. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\mathrm{Rad}\,(V, b) = \mathrm{Span}\{1 - x^2, x - x^3\}$$

Una rapida verifica ci consente di affermare che i due vettori di $\mathbb{R}_3[x]$ che generano $\mathrm{Rad}\,(V, b)$ sono linearmente indipendenti, e dunque costituiscono una base di $\mathrm{Rad}\,(V, b)$.

2. Una base di W è $\mathcal{S} = \{1 - x, x - x^2, x^2 - x^3\}$, da cui $\dim W = 3$. Scrivamo dunque la matrice associata a $b|_W$ nella base $\mathcal{S}$:

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(b|_W) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Per trovare gli indici di positivitè e nullitè si può procedere nel seguente modo: calcolo il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(t) = \det(B - tI) = \det \begin{pmatrix} -2-t & 2 & -2 \\ 2 & -2-t & 2 \\ -2 & 2 & -2-t \end{pmatrix} = -t^3 - 6t$$

Ricaviamo gli autovalori di B ponendo $p_B(t) = 0$:

$$\lambda_1 = -6, \quad \mu_a(-6) = 1$$

$$\lambda_2 = 0, \quad \mu_a(0) = 2$$

poiché la matrice B ha due autovalori nulli e uno negativo, segue che $i_+(b|_W) = 0$ e $i_-(b|_W) = 1$.

2.14 24.02.2011

Esercizio 1
Verifichiamo che l'applicazione nulla O_f appartenga a E. $\forall v \in H, 0_f(v) = 0_V$ che appartiene ad H, in quanto H è un sottospazio vettoriale e dunque contiene il vettore nullo. Lo stesso ragionamento vale per ogni $w \in L$. Si conclude che $0_f \in E$. Verifichiamo adesso che E sia chiuso per somma e per prodotto per scalare, cioè verifichiamo che

$$\forall f, g \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g \in E$$

Per ogni $v \in H$ si ha

$$(\lambda f + \mu g)(v) = (\lambda f)(v) + (\mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v)$$

poiché $f, g \in E$, allora $f(v), g(v) \in H$ e, poiché H è un sottospazio vettoriale, è chiuso per somma e per prodotto per scalare, dunque anche $\lambda f(v) + \mu g(v) \in H$. Ripetendo il ragionamento per ogni $w \in L$, si conclude che $\lambda f + \mu g \in E$, dunque E è chiuso per somma e per prodotto per scalare e quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$. Per calcolarne la dimensione, ricordiamo che, dalla formula di Grassman,

$$\dim(H + L) = \dim H + \dim L - \dim(H \cap L)$$

da cui si ricava che $\dim(H \cap L) = 1$. Sia $\{v_1\}$ una base di $H \cap L$. poiché per ogni $f \in E$ si ha $f(H) \subseteq H$ e $f(L) \subseteq L$, si ha che $f(H \cap L) \subseteq H \cap L$. In particolare, poiché la dimensione dell'intersezione è 1, ne segue che $H \cap L$ è un autospazio per ogni $f \in E$, e v_1 sarà quindi un autovettore per ogni $f \in E$ relativo all'autovalore λ. Siano adesso

$$v_2 \in H \setminus L, \qquad v_3 \in L \setminus H$$

Si ha che $\{v_1, v_2\}$ è una base di H e $\{v_1, v_3\}$ è una base di L e inoltre i vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti. Li completo a $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base di V, con $v_4 \in V \setminus (H + L)$. Si ha allora, $\forall f \in E$:

- $f(v_1) = \lambda v_1$, perché v_1 è autovettore relativo all'autovalore λ.
- $f(v_2) = av_1 + bv_2$, perché H è f-invariante.
- $f(v_3) = cv_1 + dv_3$, perché L è f-invariante.
- $f(v_4) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$, perché non abbiamo condizioni sul quarto vettore.

Alla luce di ciò, la matrice associata ad una generica applicazione f appartenente a E nella base $\mathcal{B}$ sarà della forma:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a & c & \alpha \\ 0 & b & 0 & \beta \\ 0 & 0 & d & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

con 9 parametri liberi. Da questo si deduce che $\dim E = 9$.
Esercizio 2

1. Cominciamo calcolando il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1-k & 1-k-t & 2-2k \\ k & k & 2k-t \end{pmatrix} = -t^2(t - (k+1))$$

Ricaviamo gli autovalori di A imponendo $p_A(t) = 0$. Otteniamo così

$$\lambda_0 = 0 \qquad \lambda_1 = k + 1$$

Se $k = -1$, abbiamo che A ha un unico autovalore $\lambda_0 = 0$ di molteplicitè algebrica 3. Sostituendo il valore $k = -1$ in A, osserviamo che $A_{-1} \neq 0$, dunque $\mu_g(0) < 3 = \mu_a(0)$, da cui segue che per $k = -1$, A non è diagonalizzabile. Se $k \neq -1$, abbiamo due autovalori $\lambda_0 = 0$ e

$\lambda_1 = k+1$ di molteplicitè algebrica rispettivamente 2 e 1. Per l'autovalore λ_1 sappiamo immediatamente che $\mu_g(k+1) = 1 = \mu_a(k+1)$, quindi dobbiamo calcolare i valori di $k \neq -1$ per cui $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, risolvendo il sistema lineare $A_k X = 0, X \in \mathbb{R}^3$. Svolgendo i calcoli, troviamo che $\dim \operatorname{Ker} A = 2 \; \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dunque concludiamo che A è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Calcolo il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(t) = \det(B - tI) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 2 & 0 \\ 2 & 2-t & 4 \\ -1 & -2 & -3-t \end{pmatrix} = -t^3 - 2t^2 - t$$

Imponendo $p_B(t) = 0$, ricaviamo gli autovalori di B:

$$\lambda_0 = 0, \quad \mu_a(0) = 1$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \mu_a(-1) = 2$$

Calcolo una base di $\operatorname{Ker} B$ risolvendo il sistema lineare $BX = 0$, $X \in \mathbb{R}^3$, ottenendo

$$\operatorname{Ker} B = \operatorname{Span}(1, 1, -1)$$

Posto $v_1 = (1, 1, -1)$, si ha che $\{v_1\}$ è una base di $\operatorname{Ker} B$. Calcolo poi una base di $E_B(-1)$ risolvendo il sistema lineare $(B + I)X = 0, X \in \mathbb{R}^3$, ottenendo

$$E_B(-1) = \operatorname{Ker}(B + I) = \operatorname{Span}(2, 0, -1)$$

Posto $v_2 = (2, 0, -1)$, si ha che $\{v_2\}$ è una base di $E_B(-1)$.

3. Per $k = -1$, A è triangolabile ma non diagonalizzabile, per quanto visto al punto 1. A ha il solo autovalore 0. Calcolo dunque una base di $\operatorname{Ker} A_{-1}$ risolvendo il sistema lineare $A_{-1}X = 0, X \in \mathbb{R}^3$, ottenendo

$$\operatorname{Ker} A_{-1} = \operatorname{Span}((2, 0, -1), (1, 1, -1))$$

Osserviamo che i vettori $(2, 0, -1)$ e $(1, 1, -1)$ sono autovettori sia per A_{-1} che per B. Li completo a base di $\mathbb{R}^3$ con $(1, 0, 0)$, infatti

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

quindi i tre vettori sono effettivamente linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Allora la base $\mathcal{B} = \{(2, 0, -1), (1, 1, -1), (1, 0, 0)\}$ è a bandiera sia per A_{-1} che per B, infatti le matrici associate in tale base saranno:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(A_{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che appunto sono entrambe triangolari superiori.

2.15 15.06.2011

Esercizio 1

Incominciamo dal notare che se i tre vettori che generano $\operatorname{Ker} f$ sono linearmente indipendenti, allora $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$ e quindi f risulta essere l'applicazione nulla. Determiniamo dunque i valori di k per cui v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. Per far ciò, possiamo per esempio imporre che il determinante della matrice delle coordinate sia nullo, cioè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & k^2 \\ k & k^2 & k \end{pmatrix} = 0$$

da cui otteniamo l'equazione

$$k^4 - k^3 - k^2 + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1 \quad k_3 = -1$$

Dunque $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti per $k = \{-1, 0, 1\}$. Sia $k = -1$, allora $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ e, dalla formula delle dimensioni, deve essere $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$, distinguiamo dunque due casi:

- Se $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, allora il vettore di base di $\operatorname{Im} f$ verrè mandato ripetutamente in $\operatorname{Span}(v_1)$ e quindi non potrà risultare $f^3 = 0$, quindi non esiste un'applicazione in questo caso che soddisfi le proprietà richieste.
- Se $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, segue immediatamente che $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Allora, il vettore di base di $\operatorname{Im} f$ verrè mandato a zero dalla seconda applicazione di f, dunque sarebbe $f^2 = 0$. Anche in questo caso, si conclude che l'applicazione non può esistere.

Dunque per $k = -1$, non esiste nessuna applicazione lineare che soddisfi le proprietà richieste. Sia ora $k = 0$. Anche in questo caso, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ e $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$, dunque, per lo stesso ragionamento appena fatto, si conclude che l'applicazione f non può esistere. Sia infine $k = 1$. In questo caso $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ e $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$. Se $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, per quanto giè detto, l'applicazione non può esistere, mentre se $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$, allora l'applicazione può esistere. Infatti, completiamo $\{v_1\}$ a base di $\mathbb{R}^3$ con i vettori e_1, e_2. Definiamo quindi i trasformati della base $\mathcal{B} = \{v_1, e_1, e_2\}$ nel seguente modo:

$$f(v_1) = 0, \quad f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = e_1$$

Applichiamo nuovamente f ai trasformati:

$$f^2(v_1) = f(0) = 0,$$

$$f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(v_1) = 0,$$
$$f^2(e_2) = f(f(e_2)) = f(e_1) = v_1$$

da ciò si evince che $f^2 \neq 0$, come richiesto. Infine, applicando una terza volta f, si ottiene:

$$f^3(v_1) = f(0) = 0, \quad f^3(e_1) = f(0) = 0, \quad f^3(e_2) = f(v_1) = 0$$

e quindi si osserva che $f^3 = 0$, quindi la f che abbiamo definito soddisfa le proprietà richieste.

Esercizio 2

1. $0 \in E$: infatti, $\Phi(0(v), w) = \Phi(v, 0(w)) = 0$. Si verifichi la linearitè: considerando l'applicazione $\alpha f + \beta h$ (ovviamente, $f, h \in E$), si ha $\Phi((\alpha f + \beta h)(v), w) = \alpha\Phi(f(v), w) + \beta\Phi(h(v), w) = \alpha\Phi(v, f(w)) + \beta\Phi(v, h(w)) = \Phi(v, (\alpha f + \beta h)(w))$, da cui $\alpha f + \beta h \in E$. Per il teorema di Sylvester, esiste una base in cui la matrice associata a Φ è della forma

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & -I_k \end{array}\right)$$

Affinché $f \in E$, la sua matrice associata (A) in tale base deve essere tale che ${}^tAM = MA$. In forma a blocchi, si ha

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right)$$

dove $B \in M(k,k,\mathbb{R}), C \in M(h,k,\mathbb{R}), D \in M(k,h,\mathbb{R}), E \in M(h,h,\mathbb{R})$. Dato che la matrice B deve essere tale che ${}^tBI_h = I_hB$, B è simmetrica: analogamente, E è simmetrica anch'essa $(-{}^tEI_k = -I_kE \to {}^tE = E)$. Vanno quindi trovate condizioni su C e D: date le condizioni giè scoperte, si ha che la trasposta di A è data da

$${}^tA = \left(\begin{array}{c|c} B & {}^tD \\ \hline {}^tC & E \end{array}\right)$$

Si ha quindi che

$$MA = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -D & -E \end{array}\right)$$

e

$${}^tAM = \left(\begin{array}{c|c} B & -D^t \\ \hline C^t & -E \end{array}\right)$$

devono quindi essere uguagliati i blocchi, da cui $C = -{}^tD$: determinando C, si determina anche il blocco D. Lo spazio delle matrici simmetriche di ordine n ha genericamente dimensione $\frac{(n+1)n}{2}$: per generare il blocco B ci vogliono quindi $\frac{(h+1)h}{2}$ matrici, e per generare il blocco E ci vogliono $\frac{(k+1)k}{2}$ matrici. La scelta di C è libera, e quindi servono hk matrici per generare tutte le possibili C, mentre la scelta di D è completamente determinata dalla scelta di C: completando le sottomatrici delle varie basi dei blocchi in matrici $n \times n$ aggiungendo opportuni zeri, si ottiene che una base per E è formata da $\frac{(n+1)n+(h+1)h}{2} + hk$ matrici, che è la dimensione dello spazio.

2. La risposta è negativa. Dato che non sussiste l'ipotesi di simmetria, basta trovare una applicazione rappresentata, in base di Sylvester, da una matrice della forma descritta che non ha tutti gli autovalori reali. Se f, in tale base, è rappresentata da

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha $f \in E$, ma il polinomio caratteristico di f vale $-\lambda(\lambda^2+1)$: tale polinomio ha radici complesse i, $-i$ e 0, da cui f non è diagonalizzabile.

Esercizio 3

1. La risposta è positiva. Si consideri la matrice associata al prodotto scalare in una base di $\mathbb{R}^4$ in cui i primi due vettori sono v_1 e v_2: allora tale matrice sarà della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & c & e & f \\ b & d & f & g \end{pmatrix}$$

scegliendo appositamente i coefficienti si può ottenere una matrice a determinante non nullo, come ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base $\{v_1, v_2, e_3, e_4\}$ (i vettori sono linearmente indipendenti) che ha determinante 1 e rappresenta quindi un prodotto scalare non degenere che rispetta le richieste.

2. La risposta è negativa. Infatti, in una base qualsiasi di $\mathbb{R}^3$ con u_1 ed u_2 come primi vettori (che sono linearmente indipendenti, quindi possono essere in una base e possono essere completati, ad esempio, con e_3) la matrice associata ad un qualsiasi prodotto scalare sarà della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & c \\ a & c & e \end{pmatrix}$$

ma tale matrice ha determinante zero per ogni scelta dei coefficienti a, c, e (basta notare che la prima e la seconda riga sono una multiplo dell'altra con $a, c \neq 0$: se uno dei due è addirittura 0, vi è una riga nulla), da cui rappresenta sempre un prodotto scalare degenere.

3. La risposta è positiva. Ci si ponga nella base $\{e_2, w_1, w_2\}$: in tale base, la matrice associata al prodotto scalare sarà genericamente della forma

$$\begin{pmatrix} e & c & a \\ c & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se si sceglie e positivo, il primo minore principale ha determinante positivo, e quindi l'indice di positivitè è almeno 1: se si sceglie $c \neq 0$, il secondo minore ha determinante $-c^2$, da cui è negativo e la restrizione del prodotto scalare ai primi due vettori della base è congrua alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui anche l'indice di negativitè è almeno uno. Scegliendo quindi ad esempio $e = c = a = 1$, si ha un prodotto scalare di segnatura (1,1,1) che rispetta le condizioni di ortogonalitè richieste.

2.16 8.07.2011

Esercizio 1

1. La matrice A è simmetrica, dunque sicuramente diagonalizzabile. Allora, l'unico modo per stabilire con certezza che A e B siano simili è che siano entrambe simili alla stessa matrice diagonale. Diagonalizziamo dunque A. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (3-t)^2(t+1)$$

Ricaviamo gli autovalori di A imponendo $p_A(t) = 0$:

$$\lambda_1 = -1, \mu_a(-1) = 1, \mu_g(-1) = 1$$

$$\lambda_2 = 3, \mu_a(3) = 2, \mu_g(3) = 2$$

Allora, $\exists M \in GL(3)$ tale che

$$M^{-1}AM = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo adesso il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(t) = \det(B - tI) = \det\begin{pmatrix} k+3-t & k & 2k-2 \\ -k & 3-k-t & 1-k \\ 0 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = (3-t)^2(t+1)$$

poiché $p_B(t) = p_A(t)$, allora A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicitè algebriche. poiché sicuramente $\mu_g(-1) = 1$ anche per B, bisogna determinare per quali valori di k si ha $\dim(E_B(3)) = \mu_g(3) = \mu_a(3) = 2$ risolvendo il sistema lineare $(B - 3I)X = 0$ cioè

$$\begin{pmatrix} k & -k & 2k-2 \\ -k & -k & 1-k \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli si trova che per ogni $k \neq 0$, $E_B(3) = \text{Span}(e_1 - e_2)$, da cui si evince che $\dim(E_B(3)) = \mu_g(3) = 1 \neq \mu_a(3)$, per cui B non è diagonalizzabile. Se invece $k = 0$, si ha $E_B(3) = \text{Span}(e_1, e_2)$ e quindi $\dim(E_B(3)) = \mu_g(3) = 2 = \mu_a(3)$, per cui B è diagonalizzabile. In conclusione, se $k = 0$, allora $\exists N \in GL(3)$ tale che

$$N^{-1}BN = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora, poiché $A \sim D$ e $B \sim D$, per la proprietà transitiva della relazione di similitudine, si conclude che $A \sim B$ per $k = 0$.

2. Sappiamo che la segnatura è un invariante completo di congruenza. Da quanto visto al punto 1, la segnatura di A è $(2, 1, 0)$. Calcolo dunque il polinomio caratteristico di C:

$$p_C(t) = \det(C - tI) = \det\begin{pmatrix} -t & 2 & h \\ 2 & 1-t & 0 \\ h & 0 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 2t^2 + (h^2+3)t - (h^2+4)$$

Imponendo $p_C(t) = 0$, troviamo l'equazione

$$t^3 - 2t^2 - (h^2+3) + (h^2+4) = 0$$

Osservando che per ogni $h \in \mathbb{R}$ si ha $-(h^2+3) < 0$ e $h^2+4 > 0$, abbiamo che l'equazione caratteristica presenta due variazioni e una permanenza di segno per ogni $h \in \mathbb{R}$. Per la regola di Cartesio, le due variazioni corrispondono a due radici positive e la permanenza a una radice negativa. Concludiamo che C ha due autovalori positivi e uno negativo, e quindi segnatura $(2,1,0)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, da cui deduciamo che A e C sono congruenti $\forall h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

1. Fissiamo
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
base canonica di $V = M(2,\mathbb{R})$. La matrice associata a Φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
poiché $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = I_4$, si deduce che Φ è definito positivo.

2. Bisogna dimostrare che $\Phi(f_P(X), Y) = \Phi(X, f_P(Y)), \forall X, Y \in V$. Si ha dunque
$$\Phi(f_P(X), Y) = \Phi(PX, Y) = \operatorname{tr}((PX)^t Y) = \operatorname{tr}(X^t P^t Y) =$$
poiché P è simmetrica, $P^t = P$:
$$= \operatorname{tr}(X^t P Y) = \operatorname{tr}(X^t (PY)) = \Phi(X, PY) = \Phi(X, f_P(Y))$$
e quindi f_P è simmetrico rispetto a Φ.

3. Nella base canonica $\mathcal{B}$ di V si ha
$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:
$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = t^2(t-2)^2$$
Imponendo $p_A(t) = 0$, troviamo che gli autovalori di A sono
$$\lambda_0 = 0, \mu_a(0) = 2, \mu_g(0) = 2$$
$$\lambda_1 = 2, \mu_a(2) = 2, \mu_g(2) = 2$$
Calcoliamo una base di ogni autospazio, risolvendo per ogni autovalore il sistema lineare $(A - \lambda I)X = 0$. Svolgendo i calcoli, troviamo:
$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}(E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22})$$
$$V(2) = \operatorname{Span}(E_{11} + E_{21}, E_{12} + E_{22})$$
Dove E_{ij} indica la matrice elementare avente 1 nel posto (i,j) e zero ovunque. Si conclude che $\mathcal{S} = \{E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22}, E_{11} + E_{21}, E_{12} + E_{22}\}$ è una base di autovettori per f_P. Inoltre, i primi due vettori sono ortogonali agli ultimi due in quanto provenienti da autospazi distinti. Dobbiamo

dunque ortogonalizzare tra loro i primi due, e gli ultimi due. Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt, notiamo che $E_{11} - E_{21} \perp E_{12} - E_{22}$ e $E_{11} + E_{21} \perp E_{12} + E_{22}$. Allora deduciamo che $\mathcal{S}$ è una base ortogonale di V costituita da autovettori per f_P. Per finire, dobbiamo ortonormalizzare i quattro vettori di $\mathcal{S}$. Calcoliamone dunque le norme:

$$||E_{11} - E_{21}|| = \sqrt{\Phi(E_{11} - E_{21}, E_{11} - E_{21})} = \sqrt{2}$$

$$||E_{12} - E_{22}|| = \sqrt{2}$$

$$||E_{11} + E_{21}|| = \sqrt{2}$$

$$||E_{12} + E_{22}|| = \sqrt{2}$$

In conclusione, si ha che

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di V rispetto a Φ costituita da autovettori per f_P.

2.17 5.09.2011

Esercizio 1
Verifichiamo innanzitutto se l'applicazione nulla 0_f appartenga ad E. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ $(g \circ 0_f \circ f)(v) = g(0_f(f(v))) = g(0) = 0$, quindi $0_f \in E$. Adesso verifichiamo che E sia chiuso per somma e prodotto per scalare ossia se

$$\forall h_1, h_2 \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda h_1 + \mu h_2 \in E$$

Allora, $\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$(g \circ (\lambda h_1 + \mu h_2) \circ f)(v) = g((\lambda h_1 + \mu h_2)(f(v))) = g(\lambda h_1(f(v)) + \mu h_2(f(v))) =$$

$$= \lambda g(h_1(f(v))) + \mu g(h_2(f(v))) = \lambda(g \circ h_1 \circ f)(v) + \mu(g \circ h_2 \circ f)(v) = 0 + 0 = 0$$

Quindi E è chiuso per somma e per prodotto per scalare, e quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$. Per calcolarne la dimensione, osserviamo innanzitutto che poiché f è iniettiva, dalla formula delle dimensioni si ha $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim \mathrm{Im}\, f$. Inoltre, poiché g è surgettiva, $\dim \mathrm{Im}\, g = \dim(\mathbb{R}^n) = n$ e quindi, dalla formula delle dimensioni, $\dim \mathrm{Ker}\, g = m - n$. Ricordando che $h \circ f = h|_{\mathrm{Im}\, f}$, segue che affinché un'applicazione stia in E deve mandare i vettori di $\mathrm{Im}\, f$ in $\mathrm{Ker}\, g$, quindi possiamo scrivere

$$E = \mathrm{Hom}(\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Ker}\, g)$$

da cui si deduce che $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, f \cdot \dim \mathrm{Ker}\, g = n(m - n)$.
Esercizio 2

1. Sia $W = \mathrm{Span}(e_2, e_3)$, da cui $\mathcal{B} = \{e_2, e_3\}$ è base di W e dunque $\dim W = 2$. La matrice associata nella base $\mathcal{B}$ a $\Phi_\lambda|_W$ è

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(\Phi_\lambda|_W) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si evince che la segnatura di $\Phi_\lambda|_W$ è $(1, 1, 0)$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. L'ortogonale di W è, per definizione:

$$W^\perp = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \Phi_\lambda(v, w) = 0,\ \forall w \in W\}$$

Un generico vettore $w \in W$ sarà della forma

$$w = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allora per determinare l'ortogonale di W bisogna imporre che

$$\Phi_\lambda(v, w) = (x, y, z, t) \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

da cui, svolgendo i prodotti si ottiene

$$-\alpha x - \alpha y + \beta x + \beta z + \beta t = -(x + y)\alpha + (x + z + t)\beta = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Pertanto, le equazioni cartesiane di $W^\perp$ si otterranno ponendo uguali a zero i coefficienti di α, β:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \\ x + z + t = 0 \end{cases}$$

da cui
$$\begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = y - t \\ t = t \end{cases}$$
e quindi si ottiene
$$W^\perp = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

2. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A_λ:
$$p_{A_\lambda}(t) = \det(A_\lambda - tI) = t^4 - 2t^3 - (\lambda^2 - 2\lambda + 5)t^2 + (3 - \lambda)t + \lambda^2 - \lambda = 0$$
Dunque
$$\begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda + 5 \geq 0 \\ 3 - \lambda \geq 0 \\ \lambda^2 - \lambda \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \leq 3 \\ \lambda \leq 0 \vee \lambda \geq 1 \end{cases}$$
Posti $\alpha = -(\lambda^2 - 2\lambda + 5), \beta = (3 - \lambda), \gamma = \lambda^2 - \lambda$ l'equazione diventa
$$t^4 - 2t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$$
Allora sfruttando la regola di Cartesio, abbiamo:
   - $\lambda < 0$: si ha $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma > 0$, dunque l'equzione presenta due variazioni e due permanenze di segno, a cui corrispondono due radici positive e due negative, cioè due autovalori positivi e due negativi e dunque $i(\Phi_\lambda) = (2, 2, 0)$.
   - $0 < \lambda < 1$: si ha $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma < 0$, dunque l'equazione presenta tre variazioni di segno e una permanenza, cioè tre radici positive ed una negativa, quindi tre autovalori positivi e uno negativo e pertanto $i(\Phi_\lambda) = (3, 1, 0)$.
   - $1 < \lambda < 3$: si ha $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma > 0$, per quanto detto prima, $i(\Phi_\lambda) = (2, 2, 0)$.
   - $\lambda > 3$: si ha $\alpha < 0, \beta < 0, \gamma > 0$ e dunque $i(\Phi_\lambda) = (2, 2, 0)$.
   - per $\lambda = 0$, l'equazione diventa $t(t^3 - 2t^2 - 5t + 3) = 0$ e quindi $i(\Phi_\lambda) = (2, 1, 1)$.
   - per $\lambda = 1$, l'equazione diventa $t(t^3 - 2t^2 - 4t + 2) = 0$ e quindi $i(\Phi_\lambda) = (2, 1, 1)$.
   - per $\lambda = 3$, l'equazione diventa $t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 6 = 0$ e quindi $i(\Phi_\lambda) = (2, 2, 0)$.

   Riassumendo:
$$i(\Phi_\lambda) = \begin{cases} (2, 2, 0) & \lambda < 0 \vee \lambda > 1 \\ \\ (3, 1, 0) & 0 < \lambda < 1 \\ \\ (2, 1, 1) & \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \end{cases}$$

3. Un sottospazio U di dimensione 2 su cui il prodotto scalare è definito negativo non può esistere $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ in quanto l'indice di negativitè di Φ_λ varia da 1 a 2 e quindi, se $0 \leq \lambda \leq 1$, $i_-(\Phi_\lambda) = 1$, da cui segue che la massima dimensione di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ su cui Φ_λ è definito negativo è 1.

Esercizio 3

1. L'affermazione è falsa. Sia $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \text{Span}(e_1), W_2 = \text{Span}(e_1 + e_2), W_3 = \text{Span}(e_1 - e_2)$. Si ha $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 1$ e $W_i \cap W_j = \{0\} \quad \forall i \neq j$, ma $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ non è una base di $W_1 + W_2 + W_3$, in quanto i tre vettori sono linearmente dipendenti, infatti $2(e_1) - (e_1 + e_2) - (e_1 - e_2) = 0$. Si conclude che $\dim(W_1 + W_2 + W_3) < 3$.

2. L'affermazione è falsa. Infatti, considero le matrici $A, B \in M(2, \mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
Si ha $p_A(t) = t^2 - 2t - 1$ e quindi A ha due autovalori $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$ di molteplicitè algebrica 1, dunque A è diagonalizzabile e si avrà
$$A \sim D_A = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
Mentre $p_B(t) = t^2 - 2t$ e quindi anche B ha due autovalori $\lambda = 0, \lambda = 2$ di molteplicitè algebrica 1 e dunque anche B sarà diagonalizzabile e si avrà
$$B \sim D_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Ma la matrice $C = A + B$, cioè
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
non è diagonalizzabile: infatti $p_C(t) = t^2$, dunque C ha un unico autovalore $\lambda = 0$ di molteplicitè algebrica 2. Ma si osserva che $\dim \text{Ker}\, C = \mu_g(0) = 1 \neq \mu_a(0)$ e dunque non è diagonalizzabile.

3. L'affermazione è vera. poiché sia A che B sono diagonalizzabili e $AB = BA$, allora esiste una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori comuni per A e per B. Allora, per ogni $i = 1, \ldots, n$, indicando con λ_{k_i} l'autovalore relativo a v_i per A e con μ_{h_i} quello relativo per B si avrà:
$$(A + B)(v_i) = A(v_i) + B(v_i) = \lambda_{k_i} v_i + \mu_{h_i} v_i = (\lambda_{k_i} + \mu_{h_i}) v_i$$
e quindi risulta che v_i è autovettore per $A + B$, da cui segue che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ di autovettori per $A + B$ e dunque la matrice $A + B$ è diagonalizzabile.

4. poiché A e B sono diagonalizzabili, allora $\exists M, N \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ tali che
$$M^{-1} A M = D_A, \qquad N^{-1} B N = D_B$$
con D_A, D_B diagonali. Costruiamo ora la matrice
$$H = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R})$$
Si ha che
$$H^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}$$
Allora, posta $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ si ha che
$$H^{-1} C H = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} M^{-1} A M & 0 \\ 0 & N^{-1} B N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & D_B \end{pmatrix}$$
che è diagonale, dunque C è simile ad una matrice diagonale e, per definizione, è diagonalizzabile.

2.18 20.09.2011

Esercizio 1

1. Le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono fra loro linearmente indipendenti. Le completo a $\mathcal{B}$ base di V aggiungendo $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\{A_1, A_2, A_3\}$ è effettivamente una base di V, infatti

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Calcoliamo adesso una base di W risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

da cui si ottiene che

$$W = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Posti $w_1 = (-1, 1, 0), w_2 = (1, 0, 1)$, si ha che $(0, 2, 2) = 2w_1 + 2w_2$. Affinché $W \subseteq \operatorname{Im} f$, poiché $(1, -1, 1)$ non è combinazione lineare di $\{w_1, w_2\}$, è sufficiente imporre che $f(A_3) = (-1, 1, 0)$. Dunque una siffatta applicazione lineare soddisfa tutte le condizioni di appartenenza a G. L'insieme pertanto risulterè essere non vuoto.

2. Se $f \in G$ deve essere non iniettiva, dalla formula delle dimensioni $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f < 3$. poiché $W \subseteq \operatorname{Im} f$, dovrè anche essere $\dim \operatorname{Im} f \geq 2$, e quindi combinando le due relazioni otteniamo che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ da cui segue $\operatorname{Im} f = W$. Ma se $f \in G$, allora $f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1, 1)$. Questo vettore non appartiene a W ma è comunque in $\operatorname{Im} f$. Allora si ha che $\dim W < \dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$ cioè $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e, sempre dalla formula delle dimensioni, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. Pertanto, tutte le applicazioni appartenenti a G sono iniettive.

3. Osserviamo che $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2A_1 - 3A_2$. Allora, dato che le applicazioni appartenenti a G sono lineari, si ha:

$$f \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = f(2A_1 - 3A_2) = 2f(A_1) - 3f(A_2) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pertanto un'applicazione f appartenente a G soddisfacente tale condizione non può esistere.

Esercizio 2

1. Calcoliamo innanzitutto $p_{M_h}(t) = \det(M_h - tI)$:

$$\det \begin{pmatrix} -h+1-t & 0 & 0 & -h \\ 1 & 2-t & 0 & 1 \\ -h-1 & 0 & 2-t & -h \\ h & 0 & 0 & h+1-t \end{pmatrix} = (t-2)^2(t-1)^2$$

Dunque $\forall h \in \mathbb{R}$ gli autovalori di M_h sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, ciascuno con molteplicitè algebrica 2. Verifichiamo per quali h le dimensioni degli autospazi (ossia le molteplicitè geometriche) corrispondono alle molteplicitè algebriche. $V(1) = \mathrm{Ker}\,(M_h - I)$:

$$\left|\begin{matrix} -h & 0 & 0 & -h \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -h+1 & 0 & 1 & -h \\ h & 0 & 0 & h \end{matrix}\right| \Rightarrow$$

Osserviamo che la prima e l'ultima riga sono uguali (a meno del segno), dunque scarto la prima e riordino le righe:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ h & 0 & 0 & h \\ -h+1 & 0 & 1 & -h \end{matrix}\right| \overset{A_2 \to A_2 - hA_1}{\Longrightarrow} \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ -h+1 & 0 & 1 & -h \end{matrix}\right| \overset{A_3 \to A_3 - (1-h)A_1}{\Longrightarrow} \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 1 & -1 \end{matrix}\right|$$

Dalla seconda riga deduciamo che se $h \neq 0$, $\dim V(1) = \mu_g(1) = 1$, dunque affinché $\mu_g(1) = \mu_a(1) = 2$ deve essere necessariamente $h = 0$. Verifichiamo dunque se la molteplicitè geometrica dell'autovalore 2 con $h = 0$ sia 2. $V(2) = \mathrm{Ker}\,(M_0 - 2I)$:

$$\left|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|$$

La matrice ha due colonne nulle, pertanto il sistema ammetterè due soluzioni linearmente indipendenti e quindi $\dim V(2) = \mu_g(2) = 2$. Si conclude che per $h = 0$ M_0 è diagonalizzabile.

2. Calcoliamo innanzitutto $p_{N_b}(t) = \det(N_b - tI)$. Osserviamo che N_b è triangolare, dunque il polinomio caratteristico sarà dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale:

$$p_{N_b}(t) = (t-2)^2(t-1)^2$$

Quindi N_b ha gli stessi autovalori di M_0 con le stesse molteplicitè algebriche, indipendentemente da b. Verifichiamo se N_b sia diagonalizzabile per qualche b calcolando le molteplicitè geometriche. $V(1) = \mathrm{Ker}\,(N_b - I)$:

$$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$$

Per ogni $b \in \mathbb{R}$, l'autospazio di N_b relativo all'autovalore 1 ha dimensione 1, mentre per M_0 aveva dimensione 2. poiché la dimensione degli autospazi è invariante per similitudine, concludiamo che non esiste alcun $b \in \mathbb{R}$ tale che $N_b \sim M_0$.

Esercizio 3

1. L'affermazione è falsa. Sia $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ una combinazione lineare nulla dei vettori v_i. Moltiplicando scalarmente per v_i, con $i = 1, \ldots, k$ si ottiene

$$\Phi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, v_i) = \alpha_i \Phi(v_i, v_i) = 0$$

Se i v_i sono tutti non isotropi, allora l'unico modo per annullare l'espressione è che $\alpha_i = 0$, ma poiché non abbiamo condizioni a priori su ciò, non possiamo affermarlo. Quindi l'affermazione è falsa nel momento in cui almeno due tra $v_1, \ldots, v_k$ sono isotropi rispetto a Φ.

2. L'affermazione è vera. poiché Φ è non degenere, $\operatorname{rk}\Phi = 2n$. Dato che la matrice ha anch'essa rango $2n$, l'esistenza della base richiesta è garantita dal teorema di Sylvester (caso complesso).

3. Si consideri, in $\mathbb{R}^2$, il prodotto scalare rappresentato dalla matrice

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Esso ha indice di negativitè $i_0 = 0$, ma la matrice rappresentante il prodotto scalare è congrua alla matrice

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   da cui tale prodotto scalare ha almeno due vettori isotropi linearmente indipendenti, e essi generano l'intero spazio: l'affermazione è quindi falsa.

4. L'affermazione è falsa. Il teorema spettrale ci garantisce l'implicazione a destra. Dunque è sufficiente vedere se è vera o meno l'implicazione contraria, cioè se in (V, Φ) spazio euclideo un endomorfismo è diagonalizzabile, allora esso è simmetrico. ciò è falso. Infatti, sia $V = \mathbb{R}^2$ e Φ il prodotto scalare standard e consideriamo l'endomorfismo f rappresentato nella base canonica (quindi ortonormale) di $\mathbb{R}^2$ dalla matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   quindi f non è simmetrico. Tuttavia, f è diagonalizzabile, infatti gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$, entrambi con molteplicitè algebrica (e anche geometrica) uguale a 1. Quindi questo costituisce un controesempio all'affermazione.

2.19 10.01.2012

Esercizio 1

1. L'affermazione è falsa. Sia $V = \mathbb{R}^3$, $W = \text{Span}(e_1)$, $z_1 = e_1 - e_2$, $z_2 = e_1 + e_2$. $\{z_1, z_2\}$ sono linearmente indipendenti e non appartengono a W, ma $\{e_1, z_1, z_2\}$ non è una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto $2w_1 = z_1 + z_2$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio 2

1. I vettori che generano W sono linearmente indipendenti e dunque sono una base di W. Per trovare le equazioni cartesiane di W, scriviamo i vettori di base di W e un generico vettore (x, y, z, t) come righe di una matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
e riduciamo questa matrice tramite l'algoritmo di Gauss.
$$\overset{A_3 \to A_3 - xA_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & y & z-4x & t-2x \end{pmatrix} \overset{A_3 \to A_3 + yA_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & z-4x+2y & t-2x \end{pmatrix}$$
dunque si ottiene che $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x - 2y - z = 0, 2x - t = 0\}$.

2. Due spazi vettoriale sono isomorfi se hanno la stessa dimensione. Si vede immediatamente che $\dim U = 1$ (descritto da due equazioni). Dunque riduciamo la matrice M_b tramite l'algoritmo di Gauss e calcoliamo per quali b essa abbia rango 2:
$$\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b+1 & b \\ 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{pmatrix} \overset{M_2 \to M_2 - M_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{pmatrix} \overset{M_3 \to M_3 - 2M_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{pmatrix}$$
$$\overset{M_4 \to M_4 - 2M_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & b-1 \\ 0 & 1-b & 0 \end{pmatrix}$$
Abbiamo che per $b = 1$, $\text{Ker } f_1 = \text{Span}(-e_1 + e_2)$ e per $b = 0$, $\text{Ker } f_0 = \text{Span}(e_1)$, in tutti gli altri casi, la matrice ha rango massimo e dunque $\dim \text{Ker } f_b = 0$. Concludiamo che $\text{Ker } f_b$ è isomorfo a U per $b = \{0, 1\}$.

3. La maniera piè veloce di procedere è controllare se le singole colonne di M_b sono ottenibili come combinazione lineare dei due vettori generanti W tramite l'eliminazione di Gauss. Nel seguito si risolveranno tre sistemi lineari distinti con una singola eliminazione (dato che il procedimento per portare la matrice dei coefficienti a scalini è sempre lo stesso), ma bisogna sempre considerare i passaggi successivi come un insieme di tre sistemi distinti che debbono essere soddisfatti contemporaneamente affinché la richiesta sia soddisfatta.
$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & b & b & b \\ -1 & 0 & b & b+1 & b \\ 2 & 4 & 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 0 & 2 & 2b & b+1 & 2b \end{array}\right| \to$$
$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ -1 & 0 & b & b+1 & b \\ 0 & 1 & b & b & b \\ 0 & 2 & 2b & b+1 & 2b \end{array}\right| \to$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 0 & 4 & 4b & 4b & 5b-1 \\ 0 & 1 & b & b & b \\ 0 & 2 & 2b & b+1 & 2b \end{array}\right| \to$$

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 0 & 4 & 4b & 4b & 5b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b-2 & b-1 \end{array}\right|$$

Affinché esistano soluzioni, deve quindi essere $b = 1$: per tale unico valore si ha $\operatorname{Im} f_b \subseteq W$.

4. Per surgettivitè, il rango di g è 3, e quindi ha un kernel unidimensionale. Affinché sia $g \circ f_b = 0$, deve essere $\operatorname{Im} f_b \subseteq \operatorname{Ker} g$: se si ha $\operatorname{rk} f_b \leq 1$, si può avere la tesi (la condizione è però necessaria, ma non sufficiente, in quanto se un sottospazio ha dimensione maggiore dell'altro non è detto che lo contenga). Si esegua quindi l'eliminazione di Gauss, cercando di portare il numero di pivots al minimo possibile:

$$\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b+1 & b \\ 2b & 2b-2 & 3b-1 \\ 2b & b+1 & 2b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & b-1 \\ 0 & 1-b & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come si può notare, c'è sempre almeno un pivot: inoltre, affinché tale pivot sia unico dovrebbe essere contemporaneamente $b = 0$ e $b = 1$, impossibile: allora, qualsiasi sia la g surgettiva, non esiste una scelta di b tale che $g \circ f_b = 0$.

Esercizio 3

1. La matrice A è simmetrica (dunque sicuramente diagonalizzabile). Calcoliamo intanto una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per A. Il polinomio caratteristico di A sarà

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -t(t-3)^2$$

Dunque gli autovalori di A saranno $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$, il primo con molteplicitè algebrica uguale a 1 e il secondo con molteplicitè algebrica uguale a 2. Calcoliamo adesso gli autovettori relativi a ciascun autovalore:

$$V(0) = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}(e_1 - e_2 + e_3) \qquad V(3) = \operatorname{Span}(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$$

Posti $v_1 = e_1 - e_2 + e_3, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_1 - e_3$, abbiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per A. Sappiamo giè che $v_1 \perp \{v_2, v_3\}$ in quanto provengono da autospazi distinti. Dunque dobbiamo solo ortogonalizzare v_2 e v_3. Poniamo dunque:

$$w_1 = v_1 \quad w_2 = v_2 \quad w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2 - e_3$$

Quindi $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per A (ciò è vero in virtè del fatto che l'algoritmo di Gram-Schmidt appena usato conserva la bandiera indotta dalla base). Adesso, dividendo ciascun vettore per la propria norma, otteniamo la base ortonormale richiesta:

$$z_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3)$$

$$z_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$$

$$z_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2 - e_3 \right)$$

In conclusione, $\{z_1, z_2, z_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per A.

2. La segnatura è un invariante completo per congruenza. La segnatura di A è $(2, 0, 1)$. Calcoliamo il polinomio caratteristico di B al variare di β:

$$p_B(t) = \det(B - tI) = -t^3 + 3t^2 + (\beta^4 - 6\beta^3 + 10\beta^2 - 2)t - \beta^2 + 6\beta^3 - 9\beta^2 = 0$$

poiché l'indice di nullitè di A è 1, imponiamo che il termine noto del polinomio caratteristico di B sia nullo. Risolvendo l' equazione $\beta^4 - 6\beta^3 + 9\beta^2 = 0$, troviamo che $\beta = 0 \vee \beta = 3$. Per $\beta = 0$ il polinomio caratteristico diventa:

$$-t^3 + 3t^2 - 2t = 0 \Longleftrightarrow -t(t - 1)(t - 2) = 0$$

Quindi in questo caso gli autovalori di B saranno 2,1,0, quindi due positivi e uno nullo e di conseguenza per $\beta = 0$ la segnatura di B sarà $(2, 0, 1)$ e pertanto A e B saranno congruenti. Per $\beta = 3$, il polinomio caratteristico diventa:

$$-t^3 + 3t^2 + 7t = 0 \Longleftrightarrow -t\left(t - \frac{3 - \sqrt{37}}{2}\right)\left(t - \frac{3 + \sqrt{37}}{2}\right) = 0$$

In questo caso vi saranno un autovalore positivo, uno negativo e uno nullo, dunque la segnatura di B sarà $(1, 1, 1)$, diversa da quella di A.

2.20 30.01.2012

Esercizio 1

1. L'affermazione è falsa. poiché $i_+(\Phi) = 2$, esisterè un sottospazio Z di V di dimensione 2 tale che $\Phi|_Z$ sia definito positivo. Dunque il sottospazio W intersecherè Z in una retta. Allora la restrizione di $\Phi|_W$ su quella retta sarà definita positiva e quindi l'indice di positivitè $i_+(\Phi|_W)$ sarà 1. Deduciamo da ciò che un sottospazio vettoriale W su cui la restrizione di Φ abbia segnatura $(0, 1, 1)$ non può esistere.

2. Si consideri la matrice associata a f in una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ qualsiasi: essa è della forma
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$
L'invarianza di f rispetto al piano generato da $\{v_1, v_2\}$ impone $g = h = 0$, L'invarianza di f rispetto al piano generato da $\{v_2, v_3\}$ impone $b = c = 0$, l'invarianza di f rispetto al piano generato da $\{v_1, v_3\}$ impone $d = f = 0$: in qualunque base di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata ad f è in forma diagonale. Si supponga ora per assurdo esistente un vettore $v|f(v) \neq bv$: allora, in una qualsiasi base in cui vi è anche v, la matrice associata ad f non può essere diagonale (in quanto $f(v)$ non è multiplo di v): quindi ogni vettore v viene mandato in un multiplo di se stesso, da cui è necessario che sia $a = e = i$: quindi f è effettivamente un multiplo reale dell'applicazione identica, e l'affermazione è vera.

3. L'affermazione è vera. Poniamo $i_- = m, i_0 = p$. Per il teorema di Sylvester, esiste $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice associata a Φ sia
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mathbb{I}_m & \\ & & 0_p \end{pmatrix}$$
con $\{v_p, \ldots, v_n\}$ base di $\operatorname{Rad}\Phi$ (questi p vettori sono isotropi perché stanno nel radicale). Per $i = 2, \ldots, m$ aggiungo ai vettori della base del radicale $v_1 + v_i$. Questi $m - 1$ vettori sono isotropi, infatti:
$$\Phi(v_1 + v_i, v_1 + v_i) = \Phi(v_1, v_1) + 2\Phi(v_1, v_i) + \Phi(v_i, v_i) = 0$$
Allora i vettori $v_1+v_2, \ldots, v_1+v_m, v_p, v_{p+1} \ldots, v_n$ sono $m-1+p = n-2$ vettori isotropi linearmente indipendenti. Aggiungiamo infine $v_1 - v_2, v_1 - v_3$, anch'essi isotropi e linearmente indipendenti da tutti gli altri, ottenendo così n vettori linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da vettori isotropi rispetto a Φ.

4. Lo spazio delle matrici simmetriche 2×2 ha dimensione 3: si consideri la base di $M(2, \mathbb{R})$ formata dalle matrici
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
Lo Span delle prime 3 matrici coincide con $S(2)$. In tale base, un'applicazione $f \in W$ ha matrice associata
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & a \\ 0 & \lambda & 0 & b \\ 0 & 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$
Affinché sia rispettata la condizione sul rango, è necessario e sufficiente che sia $\lambda = 0$. Dalle proprietà di somma e prodotto per scalari per le applicazioni lineari, la chiusura di W rispetto a somma e prodotto per scalari è ovvia, ed esso contiene banalmente lo 0, da cui è un sottospazio vettoriale. Vi sono 4 parametri liberi per la matrice associata e servono quindi 4 matrici per avere una base delle matrici associate a W: dato che W e lo spazio delle matrici associate a W sono isomorfi, W ha dimensione 4, in contrasto con l'affermazione che è quindi falsa.

Esercizio 2

1. Fissiamo $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base canonica di $\mathbb{R}^4$. La matrice associata a f_h nelle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ sarà

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{S}}(f_h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo adesso $\dim \operatorname{Ker} f_h$ al variare di h e tramite la formula delle dimensioni ricaveremo $\dim \operatorname{Im} f_h$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{A_4 \leftrightarrow A_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & h \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{A_3 \to A_3 - 2A_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{A_3 \to A_3 - A_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che se $h \neq 1$, il sistema ammette unicamente la soluzione nulla, dunque $\dim \operatorname{Ker} f_h = 0$ e $\dim \operatorname{Im} f_h = 3$, mentre se $h = 1$, avremo che $\dim \operatorname{Ker} f_1 = 1$ e consequenzialmente $\dim \operatorname{Im} f_1 = 2$.

2. Combinando le ipotesi (a) e (c), troviamo che $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Span}(1, 3, 0)$. Allora, completando il vettore $(1, 3, 0) = e_1 + 3e_2$ a base di $\mathbb{R}^3$ troveremo una base di $\operatorname{Im} g$. Per esempio, $\{e_1 + 3e_2, e_1, e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e di conseguenza $\{e_1, e_3\}$ è una base di $\operatorname{Im} g$. Allora, nelle basi $\mathcal{S}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo, g sarà rappresentata da una matrice della forma:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S},\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Resta da imporre la seconda ipotesi. Calcoliamo la matrice associata a $g \circ f_2$ nella base $\mathcal{C}$ eseguendo il prodotto righe per colonne fra le matrici associate a f_2 e g:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g \circ f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -3a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -2b & -b \end{pmatrix}$$

La matrice prodotto ha rango 2 se a, b sono simultaneamente diversi da zero. Dunque, presi $a = b = 1$, l'applicazione g rappresentata nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ dalla matrice

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfa le condizioni richieste. Calcoliamo infine $g(0, 1, 6, 3)$:

$$g(0, 1, 6, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

1. Sia $C = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}\}$ la base canonica di V (e_{ij} denota la matrice avente 1 nel posto (i,j) e zero ovunque). La matrice associata a Φ nella base $\mathcal{C}$ sarà dunque (eseguendo i calcoli):

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_4$$

poiché $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\Phi) = \mathbb{I}_4$, segue che Φ è definito positivo.

2. Dimostriamo che per ogni $A, B \in V$ si ha $\Phi(f(A), B) = \Phi(A, f(B))$. Siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Allora

$$\Phi(f(A), B) = \Phi\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right] = c\alpha + a\gamma + d\beta + b\delta$$

$$\Phi(A, f(B)) = \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\right] = a\gamma + c\alpha + b\delta + d\beta$$

Dunque per ogni $A, B \in V$, $\Phi(f(A), B) = \Phi(A, f(B))$, da cui segue che f è simmetrica rispetto a Φ.

3. Osserviamo che tutte le matrici appartenenti a V della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ (cioè aventi le righe uguali) sono tali che $f\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, dunque 1 è effettivamente autovalore per f e si ha inoltre

$$V(1) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

4. Osserviamo che anche -1 è autovalore per f, infatti tutte le matrici di V della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ sono tali che $f\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a & b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ e si avrà

$$V(-1) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

Inoltre, poiché f è simmetrica, per il teorema spettrale è diagonalizzabile e in particolare lo spazio V potrà essere decomposto nella somma diretta degli autospazi di f, che in questo caso sono $V(1)$ e $V(-1)$, quindi $V = V(1) \oplus V(-1)$. Inoltre, autospazi distinti sono fra loro ortogonali, e dunque $W = V(1)^{\perp} = V(-1)$. Concludiamo che W è f-invariante in quanto autospazio e la restrizione di f a W sarà diagonalizzabile in quanto f è diagonalizzabile su V.

2.21 4.09.2012

Esercizio 1

1. L'affermazione è vera. Infatti dall'ipotesi $f \circ g \equiv 0$ segue che $f|_{\operatorname{Im} g} \equiv 0$, cioè $\operatorname{Im} g \subseteq \ker f$ e quindi $\dim \operatorname{Im} g \leq \dim \ker f$. Per dimostrare la diseguaglianza opposta, notiamo che $\ker f \cap \ker g \subseteq \ker(f+g) = \{0\}$ per l'ipotesi di iniettività di $f+g$, si ha $\dim \ker f + \dim \ker g \leq \dim V$. Per la formula delle dimensioni $\dim V = \dim \operatorname{Im} g + \dim \ker g$, quindi otteniamo $\dim \ker f + \dim \ker g \leq \dim \operatorname{Im} g + \dim \ker g$ da cui $\dim \ker f \leq \dim \operatorname{Im} g$, e quindi la tesi.

2. L'affermazione è falsa. Supponiamo per assurdo che sia vera, cioè che $\exists M \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che $A = M^{-1}BM$. Poiché A è simmetrica, sicuramente $\exists N \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che $N^{-1}AN = D$, con D diagonale. Allora si avrebbe $D = N^{-1}AN = N^{-1}M^{-1}BMN$. Dato che $M, N \in GL(3, \mathbb{R})$ si ha $MN \in GL(3, \mathbb{R})$, in particolare risulterà che B è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di B è dato da $p_B(t) = -t^3 + 5t^2 - 8t + 4 = -(t-1)(t-2)^2$, da cui risulta che B ha autovalori $\lambda_1 = 1$ (semplice) e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2. L'autospazio $V_B(2)$ è determinato dalle soluzioni del sistema lineare
$$\ker(B - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
Come si vede, le soluzioni del sistema sono date da $\operatorname{Span}((1,1,3))$, cioè $\dim V_B(2) = \mu_g(2) = 1 \neq \mu_a(2)$. Si conclude che B non è diagonalizzabile e quindi siamo giunti ad un assurdo. Quindi l'affermazione risulta essere falsa.

3. L'affermazione è vera. Poniamo $\dim U = n, \dim W = p$. Siano $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base di U e $\{w_1, \ldots, w_p\}$ una base di W. Poiché $V = U \oplus W$, allora $\{u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_p\}$ è una base di V. In questa base, la matrice associata a Φ sarà della forma
$$A = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ {}^tB & 0_p \end{pmatrix}$$
dove 0_n è la matrice nulla di ordine n, 0_p quella di ordine p e $B \in M(n, p, \mathbb{K})$. Visto che Φ è non degenere, il rango di B e di ${}^tB$ dovrà essere massimo, in particolare $\operatorname{rk} B = p$ e $\operatorname{rk} {}^tB = n$. Ma dato che il rango di una matrice coincide con quello della sua trasposta, segue $n = p$. Dal fatto che $V = U \oplus W$, segue che $n + p = 2n = 2k$, da cui $n = p = k$, e quindi la tesi.

4. Sia n la dimensione di V. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base of V. Se $\mathcal{B}$ è una base, allora ogni vettore $v \neq 0$ (il caso $v = 0$ è banale) può essere scritto come combinazione lineare degli elementi della base
$$v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$$
Sia ora $W = \operatorname{Span}(v)$. Il sottospazio ha dimensione 1. Per ipotesi, $\dim W^\perp > \dim V - \dim W$, quindi $\dim W^\perp = n$. Ma allora $W^\perp = V$. Quindi l'affermazione è vera.

Esercizio 2

1. Il polinomio nullo ovviamente appartiene a W. Siano adesso $p_1, p_2 \in W$. Allora $(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) = p_1(-x) + p_2(-x) = (p_1 + p_2)(-x)$ e quindi W è chiuso per somma. Sia $p \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $(\lambda p)(x) = \lambda p(x) = \lambda p(-x) = (\lambda p)(-x)$, quindi W è chiuso anche per prodotto per scalare, quindi W è effettivamente un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Fissata $\{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$, notiamo che $1, x^2 \in W$ e non ve ne sono altri, per cui concludiamo che $\dim W = 2$.

2. Per ogni $p, g \in \mathbb{R}_3[x]$ si ha $f(p(x) + g(x)) = (p(0) + g(0), [(p+g)q](0)) = (p(0) + g(0), (pq)(0) + (gq)(0)) = (p(0), (pq)(0)) + (g(0), (gq)(0)) = f(p(x)) + f(g(x))$. Inoltre, per ogni $p \in \mathbb{R}_3[x]$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $f((\lambda p)(x)) = (\lambda p(0), \lambda(pq)(0)) = \lambda(p(0), (pq)(0)) = \lambda f(p(x))$, da cui segue che f è effettivamente lineare.

Fissiamo $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$. I trasformati dei vettori della base $\mathcal{C}$ attraverso f saranno:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1, 2) \\ f(x) &= (0, 0) \\ f(x^2) &= (0, 0) \\ f(x^3) &= (0, 0) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata ad f nella base $\mathcal{C}$ è data da

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede immediatamente che $\{x, x^2, x^3\}$ è una base di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$.

3. Dato che $\{x, x^2, x^3\}$ è una base di $\ker f$ e $\{1, x^2\}$ è una base di W, segue immediatamente che $\{x^2\}$ è una base di $\ker f \cap W$.

4. Notiamo che $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \min\{\dim \operatorname{Im} f, \dim \operatorname{Im} g\} \leq 1$ in quanto $\dim \operatorname{Im} f = 1$. Se $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = 0$, allora $g \circ f \equiv 0$ e quindi non esisterebbe alcuna applicazione soddisfacente le richieste. Se invece $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = 1$, dalla formula delle dimensioni $\dim \ker(g \circ f) = 3$, quindi $g \circ f$ avrebbe come autovalore 0 con molteplicità algebrica 3. Questo implica che può esistere al più un altro autovalore con molteplicità algebrica 1 e quindi $g \circ f$ avrebbe al più due autovalori distinti. Si conclude che anche in questo caso, non esiste alcuna applicazione g che soddisfa le richieste del problema.