Metodi Matematici per la Fisica II

Appunti personali sulla base del corso del professor L. Bracci
Università di Pisa
A.A. 2014-2015

Valerio Bertacchi

Note legali

Appunti di Metodi Matematici per la Fisica II
è un'opera distribuita con Licenza Creative Commons
Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia.
Per visionare una copia completa della licenza, visita:
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode`
Per sapere che diritti hai su quest'opera, visita:
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/deed.it`

Liberatoria, aggiornamenti, segnalazione errori:

Quest'opera viene pubblicata in formato elettronico senza alcuna garanzia di correttezza del suo contenuto. Il documento, nella sua interezza, è opera di

Valerio Bertacchi

e viene mantenuto e aggiornato dallo stesso, a cui possono essere inviate (e sono gradite) eventuali segnalazioni di errori all'indirizzo email:

`valerio.bertacchi@gmail.com`

Nota alla lettura

Questi appunti non sono pensati per essere utilizzati come primo testo di studio della materia: per essere consultati e utilizzati infatti necessitano una conoscenza preliminare dei concetti studiati. Questi appunti si configurano quindi come qualcosa di più di un *formulario* o di un insieme di schemi, ma sicuramente come qualcosa di meno degli appunti delle lezioni corso, o almeno come qualcosa di diverso. Personalmente questo documento ricalca quelli che sono i miei personali appunti opportunamente sistemati e schematizzati mettendo insieme appunti presi a lezione con materiale proveniente da libri di testo. Ho sempre trovato utili tali appunti come formulario da utilizzare durante un esame scritto o nella preparazione dell'orale.

In quest'ottica sono state omesse tutte le *dimostrazioni* e riportati solo i passaggi logici essenziali a comprendere il senso di un'asserzione: esistono sicuramente altri testi che contengono tutte le dimostrazioni di ogni enunciato qui riportato, scritte sicuramente meglio di come avrei potuto fare io.

Per mantenere sempre una *struttura schematica* e di rapida e precisa consultazione si tende quasi sempre ad utilizzare un linguaggio simbolico-matematico e quasi mai discorsivo, nonostante talvolta questo appesantisca un po' la lettura.

Per evitare di dover specificare la notazione utilizzata ogni volta si utilizza una *notazione unica* in tutto il documento (identica anche a quella di tutti gli altri documenti di appunti scritti da me), non sempre quindi la notazione è quella più comunemente utilizzata, ma è invece scelta in modo da essere univoca. Alcune rare volte ciò è stato impossibile (data la vastità degli argomenti trattati), in tal caso la notazione è dichiarata esplicitamente dove necessario.

Pisa, 7 gennaio 2015

Indice

Note Legali . . . 1
Liberatoria, aggiornamenti, segnalazione errori . . . 1
Nota alla lettura . . . 1
1 Analisi Complessa . . . 3
1.1 Integrazione delle funzioni di variabile complessa . . . 4
1.2 Proprietà e analisi delle funzioni analitiche . . . 5
2 Funzioni Armoniche . . . 10
2.1 Trasformazioni Bilineari (omografiche) . . . 10
2.2 Funzione di Green . . . 11
3 Sistemi lineari . . . 13
4 Distribuzioni . . . 14
4.1 δ di Dirac . . . 17
4.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$ . . . 17
4.3 Equazioni e Equazioni Differenziali con Distribuzioni . . . 18
5 Algoritmi risolutivi . . . 20

1 Analisi Complessa

Funzioni a variabile complessa:

$f(z) : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $z = x + iy$
$f(z) = u + iv$ dove $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$

Ordinamento:

Campo $\mathbb{C}$ non è ordinato, e non è possibile trovare ordinamento che soddisfi contemporaneamente:
$z_1 \leq z_2,\ z_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 z_3 \leq z_2 z_3 \quad \wedge \quad z_1 + z_4 \leq z_2 + z_4 \quad \forall\, z_4$

Limite:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad | \quad |f(z) - w| < \varepsilon \forall z \neq z_0 \quad | \quad |z - z_0| < \delta$

Continuità:

$f(z)$ continua in z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0$
$f(z)$ continua $\Leftrightarrow u, v$ continue

Derivata:

$f(z)$ derivabile in $z_0 \in A$ se $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \equiv f'(z_0) = \frac{df}{dz}$
$f(z)$ derivabile $\Rightarrow f(z)$ continua

SOMMA: f, g derivabili $\Rightarrow f + g$ derivabile e $(f + g)' = f' + g'$

PRODOTTO: f, g derivabili $\Rightarrow fg$ derivabile e $(fg)' = f'g + g'f'$

RAPPORTO: f, g derivabili, $d \neq 0 \Rightarrow f/g$ derivabile e $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f'}{g^2}$

COMPOSIZIONE: f, g derivabili in $z_0 \Rightarrow f \circ g$ derivabile in z_0 e $(f \circ g(z_0))' = f'(z_0) g'(z_0)$

Funzione analitica (olomorfa):

$f(z)$ analitica in un aperto A se è derivabile in A
$f(z)$ analitica in un un punto z_0 se $\exists$ un intorno di z_0 dove $f(z)$ è analitica, cioè dove è derivabile

Condizioni di Cauchy-Riemann:

$f(z)$ derivabile $\Leftrightarrow \exists \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue (cioè u e v sono differenziabili), e che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{(analogo a} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}) \tag{1}$$

Inoltre $f(z)$ analitica $\Rightarrow \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

Operatori ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$:

$\begin{cases} \partial_z \equiv \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$
$\partial_{\bar{z}} f(z) = \overline{\left(\partial_z f(z)\right)}$
se $f(z)$ è analitica $\Rightarrow \partial_z f(z) = f'(z)$ e $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$
$f(x, y) = P(z, \bar{z})$ polinomio analitico $\Rightarrow f(x, y) = P(z)$ (senza nessuna dipendenza da $\bar{z}$)

Funzione Intera:

$f(z)$ su tutto il piano complesso $\Rightarrow f(z)$ intera

Serie di Potenze:

$f(z)$ analitica in $z_0 \Rightarrow f(z) = \sum_{z=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Funzione a più valori:

$f(z) \,|\, f^{-1}$è iniettiva solo su intervalli aperti (e non su tutto il dominio, quindi non è globalmente invertibile)
$\Rightarrow \exists\, z$ ai quali corrispondono più valori di $f(z)$

Determinazioni:

scelta del valore da considerare in una funzione a più valori per renderla una funzione propria $\Rightarrow$ introdotta *discontinuità*

Punto di Diramazione

per la funzione a più valori $f(z) : z_0 \,|\, \forall \varepsilon > 0 \; \exists$ una curva γ chiusa che racchiude z_0 lungo la quale $f(z)$ cambia valore: $f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = f(z_0 + \rho e^{i(\theta+2\pi)})$

Punto all'Infinito

"∞" è un punto di diramazione

Taglio:

curva semplice del piano complesso che congiunge due punti di diramazione, dividendo il piano complesso in *fogli*

Superficie di Riemann (foglio):

sottinsieme del dominio di $f(z)$ compreso tra *tagli* scelti.

Nell'immagine di tale intervallo $f^{-}1(z)$ risulta invertibile $\Rightarrow f(z)$ è sul singolo foglio una funzione a un sol valore

Scorrendo con continuità z si attraversano i vari tagli, cambiando ogni voglta foglio (che siano finiti o infiniti) e si risolvono quindi le varie determinazioni di $f(z)$

Senso di Percorrenza:

è rilevante nella determinazione del valore di $f(z)$, in base ai collegamenti tra tagli

percorrendo γ chiusa intono ad un punto di diramazione si deve attraversare almeno un taglio, quindi si cambia foglio (e ovviamente si aumenta il valore di $\arg(z)$ di 2π)

Variazione di Argomento:

$f(z) = |z|e^{\theta} \qquad \Delta_\gamma \theta \equiv \int_\gamma (\frac{\partial \theta}{\partial x} dx + i \frac{\partial \theta}{\partial y} dy)$

$f(z) = gh, \gamma$ curva chiusa $\quad \Rightarrow \Delta_\gamma \arg(f) = \Delta_\gamma \arg(g) + \Delta_\gamma \arg(h)$

$f(z) = g/h, \gamma$ curva chiusa, $h \neq 0 \quad \Rightarrow \Delta_\gamma \arg(f) = \Delta_\gamma \arg(g) - \Delta_\gamma \arg(h)$

1.1 Integrazione delle funzioni di variabile complessa

Integrale

$\gamma(t), t \in I$ curva $\mathcal{C}^1$ a tratti, $f(z)$ continua:

$$\int_\gamma f(z)dx \equiv \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i \int_\gamma (u(x,y)dy + v(x,y)dx) \tag{2}$$

cioè si integra lungo γ la forma differenziale $f(x+iy)dx + if(x+iy)dy$

Verso: $\int_{\gamma(z_1,z_2)} f(z)dz = -\int_{\gamma(z_2,z_1)} f(z)dz$

Linearità: con $f(z), g(z) \in \mathcal{C}^1 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \qquad \int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$

Teorema di Darboux:

$f(z) \in \mathcal{C}^0, M = \max_{z\in\gamma}|f(z)| \Rightarrow \quad |\int_\gamma f(z)dz| \leq M\ell(\gamma)$

Teorema di Cauchy I:

A aperto semplicemente connesso, $f(z)$ analitica in A e continua sulla frontiera $\Rightarrow \forall \gamma$ curva chiusa $\subset A$

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \tag{3}$$

estensione su A non semplicemente connesso:

$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} f(z)dz \quad$ dove γ_i sono curve attorno ai punti di non analiticità

$\oint_{\partial A} f(z)dz = 0 \quad$ dove ∂A è esterna+"buchi", percorsa in modo coerente: tenuto A dalla stessa parte

$f(z)$ **Conservativa**

$f(z)$ risulta una forma differenziale *conservativa*: $\forall \gamma_1, \gamma_2$ con stessi estremi $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$

Teorema di Cauchy II:

$f(z)$ analitica in $z_0 \Rightarrow \forall\, \gamma$ curva chiusa che racchiude z_0 e contenuta in un suo intorno (o in A dove $f(z)$ è analitica):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{4}$$

estensione su A non semplicemente connesso:

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ dove ∂A è esterna+"buchi", percorsa in modo coerente

Formula integrale di Cauchy:

$f(z)$ analitica $\Rightarrow$ $f(z) \in \mathcal{C}^\infty$, derivabile infinite volte sotto il segno di integrale e $\forall \gamma \subset A$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{5}$$

Teorema di Morera:

Lemma1: A semplicemente connesso, $f(z)$ analitica, $\gamma \subset A \Rightarrow F(z) = \int_{\gamma(z_0,z)} f(\zeta) d\zeta$ indipendente da γ

Lemma2: A semplicemente connesso, $\gamma \subset A$, $\Rightarrow F(z)$ è analitica e $F'(z) = f(z)$

A connesso, $f(z)$ continua, $\oint f(z)dz = 0$, $\gamma \subset A \Rightarrow \int_\gamma f(\zeta)d\zeta = F(z) \Rightarrow f(z)$ è analitica

$F(z)$ risulta definita a meno di costante: $F(z) + a$ è analitica e $(F(z) + a)' = f(z)$

Successioni di funzioni analitiche:

A semplicemente connesso, $\{f_n\}$ successione di funzioni analitiche in A $|\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniformemente $\Rightarrow f(z)$ analitica in A

estensione alle derivate: $\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}$ uniformemente

1.2 Proprietà e analisi delle funzioni analitiche

Teorema di Liouville

$f(z)$ intera, $|f(z)| < M \Rightarrow f(z)$ costante

Teorema Fondamentale dell'Algebra:

$P_n(z)$ polinomio di grado $n \geq 1 \Rightarrow P_n$ ha almeno una radice in $\mathbb{C}$

Zeri di un polinomio complesso:

$P_n(z)$ polinomio di grado $n \geq 1, \exists z_0 | P(z_0) = 0 \Rightarrow P_n$ ha esattamente n radici in $\mathbb{C} : P_n(z) = \prod_{i=0}^{n} (z - z_i)^{k_i}$

Principio del massimo per funzioni analitiche:

Lemma: $f(z)$ analitica su A aperto connesso, $|f(z)|$ costante $\Rightarrow f(z)$ costante

$f(z)$ analitica in aperto connesso A, $f(z)$ non costante $\Rightarrow |f(z)|$ non ha massimo in A

Serie di Potenze:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = S(z)$

Raggio di Convergenza: $\rho > 0 \,|\, S(z)$ converge $\forall\, z \in |z - z_0| < \rho$, totalmente $\forall\, z \in |z - z_0| \leq r < \rho$

Analiticità: $S(z)$ analitica $\forall\, z \in |z - z_0| < \rho$

Serie Bilatere: $B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^{-n}$

Raggi di Convergenza: prima serie converge $\forall\, z \in |z - z_0| < \rho_1$, seconda $\forall\, z \in |z - z_0| > \rho_2$

Corona di Convergenza: $B(z)$ converge nella corona circolare $\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1$

Analiticità: $S(z)$ analitica $\forall\, z \in \{\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1\}$

Serie di Taylor-Laurent:

$f(z)$ analitica in aperto A, γ curva chiusa $\subset A$ contenente $z_0 \Rightarrow \forall z \in$ corona $\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1 \subset A$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{6}$$

Inoltre se $z_0 \in A \Rightarrow \forall z \in |z - z_0| < \rho_1 \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Inoltre ogni serie di pontenze $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, se non converge solo in z_0 rappresenta una $f(z)$ analitica

Funzioni definite in forma integrale:

Curva finita:

$f(z) = \int_\gamma g(z, \zeta) d\zeta \quad \gamma(t)$ curva finita, $\quad g(z, \zeta)$ analitica, $\quad \zeta(t) \quad \Rightarrow$

$f(z)$ analitica e $D^{(n)} f(z) = \int_\gamma D^{(n)} g(z, \zeta) d\zeta$

Curva infinita:

$f_n(z) = \int_{\gamma_n} g(z, \zeta) d\zeta \quad \gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$ infinita, $\quad g(z, \zeta)$ analitica $\quad \int_{\gamma_n} g \to \int_\gamma g$ uniformemente

$\Rightarrow f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ analitica e $D^{(n)} f(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} D^{(n)} g(z, \zeta) d\zeta$

Trasformata di Fourier

$\hat{f}(x) = \int e^{itx} g(t) dt \quad g(t) \in \mathbb{L}^1, \mathbb{L}^2.$

$g(t) e^{a(t)} \in \mathbb{L}^1, a(t) > 0$ con la sostituzione $x \leftrightarrow z, \quad \Rightarrow \quad f(z)$ analitica

$f_n(x) = \int_{-n}^{n} e^{itz} g(t) dt, g(t)$ a supporto compatto $\quad \Rightarrow \quad f_n(z)$ intera

Funzione Γ di Eulero:

$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad$ definita $\forall\, z \,|\, \mathfrak{Re}(z) > 0$

$\Gamma(z)$ analitica $\forall\, z \,|\, Re(z) > 0 \qquad \Gamma(n + 1) = n! \qquad \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

Parte Principale (Valore Principale di Cauchy):

$\mathrm{VP}(\int f(z) dx) = \int f(z) dz$ dove le singolarità vengono isolate con intervalli simmetrici (spezzando l'integrale intorno ad esse) e poi facendo i limiti opportuni per coprire il dominio d'integrazione

$\exists$ integrale improprio di $\int f(z) dz \Rightarrow \exists \mathrm{VP}(\int f(z) dx)$

Lemma di Jordan:

$\int (g(z)) e^{iaz} dz, \quad a > 0 \quad [a < 0] \quad \gamma$ semicirconferenza centrata in 0, di raggio R, posta nel semipiano $|\, \mathfrak{Im}(z > 0) \quad [\mathfrak{Im}(z) < 0], \quad \lim_{R\to\infty} (\max_{z\in\gamma} |g(z)|) = 0, \quad F = g(z)) e^{iaz} \Rightarrow$

$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma g(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{\mathfrak{Im}(z_i > 0)} \mathcal{R}_F(z_i) \qquad [\lim_{R\to\infty} \int_\gamma g(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{\mathfrak{Im}(z_i < 0)} \mathcal{R}_F(z_i)]$

Zeri:

$f(z)$ analitica in A aperto connesso, $f(z_0) = 0$ e $f^{(n)}(z_0) = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in A$

Zero di ordine k:

$f(z)$ analitica su A connesso, $f(z)$ non nulla, $f(z_0) = 0$ e $f^{(n)}(z_0) = 0 \,\forall\, n < k \Rightarrow z_0$ è zero di ordine k

Teorema degli Zeri:

$f(z)$ analitica in A connesso $\Rightarrow$ insieme degli zeri di $f(z)$ non ha punti d'accumulazione $\subset A$ oppure $f(z) = 0$ identicamente

Punto regolare:

$z_0 \in \partial C$ (dove C è un cerchio in cui $f(z)$ è analitica) $|\, \exists$ cerchio C_0 di raggio z_0 su cui $g(z) = f(z)$ in $C \cap C_0$ è analitica

Punto singolare:

punto non regolare, rispetto a $f(z)$

Esistenza: $\rho < \infty$ raggio di convergenza di $f(z) \Rightarrow$ su circonferenza di raggio$= \rho \,\exists\, z_0$ singolare per $f(z)$

Limite: $\lim_{z\to z_0} f(z) \nexists \Rightarrow z_0$ sigolare (utile fare il limite su curva γ che va dal centro del cerchio a z_0)

Prolungamento (estensione) analitico:

$f(z)$ analitica in A aperto, $g(z)$ analitica in B, $f(z) = g(z) \forall z \in A \cap B \Rightarrow g(z)$ prolunga $f(z)$ in $A \cup B$

Unicità: il prolungamento analatico di $f(z)$, cioè $g(z)$ è unico

Prolungamento a catena: si prolunga con $A_i \mid A_i \cap A_{i+1} \neq 0 \Rightarrow$ in $A_i \cap A_{i+1}\, f_i = f_{i+1}$

Funzioni a più valori: facendo una catena di aperti, tornando in $A_k \cap A_0 1 \Rightarrow f(z)$ può cambiare valore

Uguaglianza funzioni: $f(z), g(z)$ analitiche in $A, B = \{z \in A | f(z) = g(z)\}, B$ ha almeno un punto d'accumulazione $\Rightarrow f(z) = g(z) \forall z \in A$

Hopital: $f(z), g(z)$ analitiche in intorno di $z_0, f(z_0) = g(z_0) = 0 \Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$

Proprietà relazionali: "g_B prolunga f_A è simmetrica, riflessiva ma non transitiva

Prolungamento analitico su curva:

$f(z)$ analitica in z_0, γ curva che va da z a z_0, C_i successione di cerchi concatenata a γ (cioè $|\gamma = \bigcup_i c_i$, con c_i curve interne a C_i, con C_0 e C_n centrati in z_0 e z_f), $\exists f_i(z)$ analitiche in $C_i \mid f_0 = f, f_i = f_{i+1}$ in $C_i \cap C_{i+1} \Rightarrow$ (z) prolungata da z_0 a intorno di z_f lungo γ

indipendenza da cerchi: fissata γ il prolungamento è indipendente dalla famiglia di C_i scelta

Curve Omotope: γ_1, γ_2 omotope da z_0 a $z_f \Rightarrow$ in un intorno di z_f dano origine allo stesso prolungamento

Teorema di Monodromia:

A semplicemente connesso, $f(z)$ analitica in $z_0 \Rightarrow$ prolungabile ad un intorno di z_f $\forall z_f \in A$ con $g(z)$ ad un sol valore indipendente da γ, $\forall \gamma \subset A$

Punto singolare isolato:

z_0, per $f(z), | \exists$ intono I di $z_0 \mid f(z)$ analitica e ad un sol valore per $z \in I \backslash \{z_0\}$

Sviluppabilità: $\forall z \in$ corona $0 < |z - z_0| \leq \rho \quad f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$

Singolarità Rimovibile:

z_0 punto singolare isolato per $f(z)$ sviluppabile in sole potenze positive, $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$

Prolungamento: z_0 singolarità rimovibile $\Rightarrow \sum_{i=0} a_i (z - z_0)^i$ analitica in $z_0, \lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$

Limitatezza: z_0 punto singolare isolato per $f(z)$ con $|f(z)| < M \, \forall z \in I(z_0) \Rightarrow z_0$ è singolarità rimovibile

Singolarità Non Removibile

$f(z)$ sviluppabile con almeno 1 potenza negativa $\Rightarrow \nexists$ prolungamento analitico in z_0, $|f(z)| \not< \infty$ in $I(z_0)$

Polo di Ordine n

Sviluppo di $f(z)$ ha esattamente n potenze negative

Limite: z_0 polo di ordine n per $f(z) \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = l \neq 0$

Modulo: z_0 polo di ordine n per $f(z) \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

Andamento: z_0 polo di ordine n per $f(z) \Rightarrow$ in $I(z_0)$ si comporta come $\frac{1}{(z - z_0)^n}$

Zero di $1/f(z)$: z_0 polo di ordine n per $f(z) \Leftrightarrow \frac{1}{f(z)}$ ha zero di ordine n in z_0

Prodotto: $g(z) = \prod_i f_i(z)$ analitiche con poli in z_0, $j = \left(\sum \deg(\text{Poli}_g)\right) < k \Rightarrow$ $h(z) = (z - z_0)^k g(z)$ ha uno zero in z_0 di ordine $j - k$, altrimenti ha un polo di ordine $k - j$

Singolarità essenziale

Sviluppo di $f(z)$ ha infinite potenze negative

Limite: z_0 singolarità essenziale per $f(z)$ $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$

Picard (debole): z_0 singolarità essenziale per $f(z) \Rightarrow \forall\, w \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, $\forall$ intorno di $z_0\, \exists$ infiniti z tali che $|f(z) - w| < \varepsilon$

Teorema di Picard: z_0 singolarità essenziale per $f(z) \Rightarrow \forall w \in \mathbb{C}$ (escluso al più un valore eccezionale), $\forall$ intorno di $z_0\, \exists$ infiniti $z \,|\, f(z) = w$

Valore Eccezionale: z_0 singolarità essenziale, $\exists I(z_0) \,|\, f(z) \neq w_0\, \forall z \in I \Rightarrow w_0$ eccezionale

Unicità: w_0, se $\exists$, è unico

$f(z)$ Dispari: $f(z)$ dispari $\Rightarrow \nexists\, w_0$ eccezionale tranne eventualmente $w_0 = 0$

Residuo (di $f(z)$ in z_0):

z_0 punto singolare isolato per $f(z)$ analitica su $A\backslash\{z_0\}$, curva $\gamma \in A \Rightarrow \mathcal{R}_f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz$

z_0 polo di primo ordine: $\mathcal{R}_f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$

z_0 polo di ordine n: $\mathcal{R}_f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big((z-z_0)^n f(z)\big)\right]_{z=z_0})$

Rapporto: $f = g/h$ (g, h analitiche in z_0),$g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ polo primo ordine per $f(z)$ e $\mathcal{R}_f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Residuo di $f(z)$ pari: $\mathcal{R}_f(0) = 0$ $\qquad$ ($f(z)$ pari $\Rightarrow a_1 = 0$)

Teorema dei Residui Interni:

$z_1 \dots z_n$ punti singolare isolato per $f(z)$ analitica su $A\backslash\{z_1 \dots z_n\}$, curva $\gamma \in A \Rightarrow$

$$\oint_\gamma f(z)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_f(z_j) \tag{7}$$

Punto all'infinito:

$f(z)$ analitica $\forall |z| > R$ (cioè in I_∞)$\Rightarrow \infty$ è punto singolare isolato per $f(z)$
$g(\frac{1}{z}) = g(z') = f(z)$, $z' = 0$ isolato per $g(z') \Rightarrow z = \infty$ isolato per $f(z)$ con le stesse caratteristiche:

singolarità removibile: $f(z)$ sviluppabile in $I(\infty)$ in sole potenze ≤ 0 ($|f(z)| < \infty$ in $I(\infty)$)

polo di ordine n: $f(z)$ sviluppabile in I_∞ con n potenze > 0 ($\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = l \neq 0$)

singolarità essenziale: $f(z)$ sviluppabile in I_∞ con ∞ potenze > 0 ($\forall w \in \mathbb{C}\ \exists$ infiniti $z \,|\, f(z) = w$)

Residuo all'infinito: $\mathcal{R}_f(\infty) = -a_{-1}$

Teorema dei Residui Esterni:

$f(z)$ analitica su curva γ e al di fuori tranne in $z_1 \dots z_n$ punti singolari isolati per $f(z)$ esterni a γ, più il punto $\infty \Rightarrow$

$$\oint_\gamma f(z)dx = -2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_f(z_j) - 2\pi i \mathcal{R}_f(\infty) \tag{8}$$

Somma dei Residui:

$f(z)$ analitica su tutto il piano complesso tranne in $z_1 \dots z_n$ punti singolari isolati più il punto $\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_f(z_j)_f + \mathcal{R}_f(\infty) = 0$

Teorema di Liouville:

$f(z)$ intera e analitica anche in $\infty \Rightarrow f(z) =$ costante

Sfera di Riemann:

Sfera $\mathcal{S}$ su piano complesso con polo sud tangente all'origine

Proiezione stereografica: $P \neq N(\text{Nord}) \in \mathcal{S} \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$ (tramite semirette che partono da N e intersecano $P \in \mathcal{S}$ e $z \in \mathbb{C}$)

Estensione: $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ omeomorfo a sfera, con corrispondenza continua e biunivoca e $N \leftrightarrow \infty$

Compattezza: $\mathcal{S}$ risulta compatta $\Rightarrow \mathbb{C}_\infty$ compatto (mentre $\mathbb{C}$ non lo è)

Connessione: $\mathcal{S}$ risulta semplicemente connessa $\Rightarrow \mathbb{C}_\infty$ semplicemente connesso

Tagli: Taglio finito$\Rightarrow$ proiezione dell'arco tra due rette intersecanti z_1, z_2 non passante per N
Taglio infinito$\Rightarrow$ proiezione dell'arco tra due rette intersecanti z_1, z_2 passante per N

Indicatura Logaritimica:

$f(z)$ analitica su curva γ e dentro tranne in $z_1 \dots z_n$ poli, $f(z) \neq 0 \forall z \in \gamma \Rightarrow$
$f'(z)/f(z)$ analitica su γ e dentro tranne in $z_1 \dots z_n$
$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_\gamma \frac{d}{dz}(\ln(f(z)) = 2\pi i(N_z - N_p)$ $\quad$ (N_z, N_p =numero zeri e di poli di $f(z)$ contanti con l'ordine)
$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(f(z)) = N_z - N_p$
$f(z) = e^{h(z)}$, $h(z)$ analitica, $\gamma_{z \to z_0} \Rightarrow \ln(f(z)) = \ln|f(z)| + i\theta_0 + i\Delta_\gamma \arg(f(z))$ analitica e a un sol valore

Teorema di Rouché:

$f(z), g(z)$ analitiche su curva γ e dentro, $\forall z \in \gamma : f \neq 0, f + g \neq 0, |g| < |f| \Rightarrow$
dentro γ $f(z)$ e $(f+g)(z)$ hanno lo stesso numeri di zeri
$f(z)$ analitica in $I(z_0)$, $f'(z) \neq 0 \Rightarrow \exists$ inversa analitica
$f(z)$ analitica non costante in A aperto $\Rightarrow f(A)$aperto

2 Funzioni Armoniche

Analitica - Armonica

$f(z) = u + iv$ analitica in A aperto $\Rightarrow u, v$ armoniche, cioè $\nabla^2 u(x,y) = 0 \quad \nabla^2 v(x,y) = 0$

Armonica - Analitica

$u(x,y)$ armonica su A semplicemente connesso $\Rightarrow \quad \exists\, v(x,y)$ armonica $\mid f(z) = (u + iv)$ analitica in A
$u(x,y)$ armonica su $A \Rightarrow \quad \exists\, v(x,y)$ armonica $\mid f(z) = (u + iv)$ analitica in A solo localmente
$\forall\, u(x,y)$ armonica su $A\ \exists\, f, g$ analitiche su A e v, s armoniche $\mid f = u + iv \quad g = s + iu$

Armonica coniugata: $v(x,y)$ rispetto a $u(x,y) \mid u + iv$ analitica

Unicità: l'armonica coniugata è unica a meno di costanti additive

Linee di forza:

$f(z) = u + iv$ analitica $\Rightarrow$ curve $\mid u =$costante ortogonali a curve $\mid v =$costante

Problemi di potenziale:

Cerco $u \mid \nabla^2 u(x,y) = 0$ su regione A con condizione nota $u(\partial A) \Rightarrow$ cerco $f(z)$ analitica $|\mathfrak{Re} f(\partial A) = u(\partial A)$

Trasformazioni Conformi:

Cambio di variabili $w(x,y)$ che manda: $u(x,y) \to \psi(\xi,\eta)$ da A a B con ξ, $\eta \mid f(z) = \xi + i\eta$ analitica in A
(La trasformazione deve essere iniettiva e quindi invertibile)

Cambio di variabili: $\psi(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \qquad u(x,y) = \psi(\xi(x,y), \eta(x,y))$

Condizioni al Bordo - Dirichlet: $u(x,y) = a(x,y)$ su $\partial A \Rightarrow \psi(\xi,\eta) = a(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ su ∂B

Condizioni al Bordo - Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n} = a(x,y)$ su $\partial A \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n_w}(\xi,\eta) = |\frac{dz}{dw}| a(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ su ∂B

Armonica: $\nabla^2_{x,y} u = 0 \Leftrightarrow \nabla^2_{\xi,\eta} \psi = 0 \quad$ e $\quad |f'(z)|^2 \nabla^2 \psi = 0$

Angoli: $w(x,y)$ conserva gli angoli

2.1 Trasformazioni Bilineari (omografiche)

Trasformazione Bilineare:

Trasformazione conforme che rispetta:

$$w(x,y) = w(z) \qquad w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0 \tag{9}$$

Dominio:

$w(z) : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ (piano esteso in se) se $\exists, w = \infty$ è immagine di $z = -\frac{d}{c}$

Analiticità:

$w(z)$ analitica $\forall\, z \mid cz + d \neq 0 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$

Generatrici:

$\forall\, w(z)$ bilineare, $w(z)$ è composizione di $g(z)$ lineare e di $h(z) = 1/z$ (inversione)

Rette e Cerchi:

$w(z)$ manda l'insieme R delle rette e dei cerchi in se stesso

Insieme: $R = \{\rho \mid \rho = pz\bar{z} + qz + \bar{q}z + r = 0$ con $p, r \in \mathbb{R}$, $|q|^2 > rp\}$

Rette: se $z \mid w(z) = \infty$ (cioè $z = -\frac{d}{c}) \in \rho \Rightarrow \infty \in w(\rho) \Rightarrow w(\rho)$ è una retta

MATRICE:

$w \leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

PARAMETRI: $w(z)$ ha tre parametri indipendenti (dati tre trasformati $w(z)$ fissata)

COMPOSIZIONE: $w \leftrightarrow M, g \leftrightarrow N \Rightarrow w(g(z)) \leftrightarrow MN$

INVERSIONE: $w \leftrightarrow M \Rightarrow w^{-1} = M^{-1}$

PUNTI SIMMETRICI:

RISPETTO A CERCHIO (R_0, z_0): $z_1, z_2 \,|\, (z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = R^2 \quad \arg(z_1 - z_0) - \arg(z_2 - z_0) = \arg(R^2) = 0$

RISPETTO A RETTA $(z - b)e^{-ia}$: $z_1, z_2 \,|\, (z_1 - b)e^{-ia} = (\bar{z}_2 - \bar{b})e^{ia}$

TRASFORMAZIONI BILINEARI: $w(z)$ bilineare manda punti simmetrici in punti simmetrici

PROBLEMI DI POTENZIALE:

Data $\nabla^2 u(z) = 0$ in A, $\quad u(z) = a(z)$ su $\partial A \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \psi(w) = 0$ in B, $\quad \psi(w) = a(w)$ su $\partial B = w(\partial A)$
Cioè $u(z) = \psi(w(z))$ con u e ψ uguali in forma

EQUAZIONE DI LAPLACE SUL CERCHIO:

EQUAZIONE: $\nabla^2 u = 0$ con $\begin{cases} u(R, \varphi) = F(\varphi) \\ u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi) \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \frac{d}{dn} u(R, \varphi) = F(\varphi) \\ u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi) \end{cases}$

FORMULA DI POISSON: $u(\rho, \varphi) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\theta)}{\rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \varphi)} d\theta$

SOLUZIONE: $u(\rho, \phi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \left(a_m e^{im\varphi} + b_m e^{-im\varphi}\right)$ con $\begin{cases} a_m = \frac{1}{2\pi R^m} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-im\varphi} d\varphi \\ b_m = \bar{a}_m = \frac{1}{2\pi R^m} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{im\varphi} d\varphi \end{cases}$

2.2 Funzione di Green

FORMULA DI GREEN:

$u, G \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\bar{A}) \quad A \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_A (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u) dV = \int_{\partial A} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS \tag{10}$$

CASO 2D: se $A \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \int_A (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u) dS = \int_{\partial A} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}\right) dl$

PROBLEMA DI POTENZIALE:

FUNZIONE AUSILIARIA: $G_0 = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$

ARMONICITÀ: G_0 è armonica: $\nabla^2 G_0 = 0$

CASO 2D: $G_0 = -2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$

SOLUZIONE: $u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n}\right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_A (G_0 \nabla^2 u) dV \quad$ (non risolubile: ignote u e $\frac{\partial u}{\partial n}$ su ∂A)

u ARMONICA: $\nabla^2 u = 0 \Rightarrow u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_0}{\partial n}\right) dS$

TEOREMA DELLA MEDIA:

u armonica, $S_R \in A$ sfera di raggio R e centro $\mathbf{r}_0 \Rightarrow \quad u(r_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_r} u(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n}) d\Omega$
(Il potenziale al centro della sfera è uguale alla media del potenziale sul bordo)

PRINCIPIO DEL MASSIMO:

u armonica su $A \Rightarrow u$ non può avere massimi o minimi in A

COSTANZA: A connesso, u armonica in A con massimo $\in A \Rightarrow u$ costante

DIFFERENZA: a, b armoniche in A, $\in \mathcal{C}^0$ in $\bar{A}$, $a - b \geq 0$ su $\partial A \Rightarrow a - b \geq 0$ in A

MODULO: u armonica in A, $|u| \leq M$ su $\partial A \Rightarrow |u| \leq \max_{\partial A} |u| \leq M$ in A

Prolungamento armonico:

u armonica in $I(\mathbf{r}_0)\backslash\{0\}$, $\lim_{\mathbf{r}\to 0} uG_0 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|u = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists v \,|\, \nabla^2 v = 0$ in $I(\mathbf{r}_0)$ e $u = v \,\forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$

Caso 2D: u armonica in $I(\mathbf{r}_0)\backslash\{0\}$ u limitata in $I(\mathbf{r}_0) \Rightarrow \quad \exists v \,|\, \nabla^2 v = 0$ in $I(\mathbf{r}_0)$ e $u = v \,\forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$

Funzione di Green

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + h(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + h(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \qquad \text{con } h(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \,|\, G = 0 \text{ su } \partial A \tag{11}$$

Simmetria negli argomenti: $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$

(1) Armonicità: $\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \in A$

(2) Andamento al centro: $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \frac{G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0} = 1$

(3) Andamento al bordo: $G = 0$ su ∂A

Definizione univoca: G è funzione di Green per $A \Leftrightarrow (1),(2),(3)$

Significato fisico: G è il potenziale in r di una Q unitaria posta in r_0, con condizioni al contorno nulle

Problema di Dirichlet (per ogni geometria):

Problema: trovare u in A sapendo $\nabla^2 u$ in A e u su ∂A

Metodo: utilizzabile la soluzione di un u su una sfera con $G_0 \to G$ in modo da eliminare $\frac{\partial u}{\partial n}$ su ∂A. Nessuna condizione sul grado di libertà sulla scelta di G, (basta che sia funzione di Green per A)

Funzione di Green: $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + h(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$

Soluzione: $u(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial A}\left(u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\int_A (G\nabla^2 u)dV$

Problema di Neumann (per ogni geomtria):

Problema: trovare u in A sapendo $\nabla^2 u$ in A e $\frac{\partial u}{\partial n}$ su ∂A

Metodo: essendo un problema definito a meno di costante, si cerca $G \,|\, \frac{\partial G}{\partial n} = K$
$\Rightarrow \int_{\partial_A} \frac{\partial G}{\partial n} dS = K\mathcal{M}_2(\partial A) = -4\pi \Rightarrow \int_{\partial A} u\frac{\partial G}{\partial n} dS = K_2$

Soluzione: $u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial A}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\int_A (G\nabla^2 u)dV + \frac{K_2}{4\pi}$

Trasformazione della funzione di Green:

$G_A(z_0,z)$ di Green per A, $w(z) : A \to B$ conforme $\Rightarrow G_B(w_0,w) = G_A(z_0(w_0),z(w))$

Funzioni di Green Particolari:

Sfera:

$$G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{R}{r_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(R/r_0)^2|} \tag{12}$$

Cerchio: $G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) = -2\ln\left(\frac{R|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{r_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(R/r_0)^2|}\right)$

Semipiano 2D (superiore o inferiore): $G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) = -2\ln\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}}_0|}\right)$

3 Sistemi lineari

Sistema Lineare e Indipendente dal Tempo:

Sistema che lega segnale in ingresso $f(t)$ e in uscita $g(t) = L(f(t))$ cioè $f(t) \xrightarrow{L} g(t)$ in modo che:

$$\begin{cases} L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2) \\ L(\lambda f) = \lambda L(f) \\ L(f(t-T)) = L(f(t))|_{t=t-T} \quad \text{cioè} \quad g(t) = L(f(t)) \Rightarrow g(t-T) = L(f(t-T)) \end{cases}$$

Analisi in Frequenza:

Dato un ingresso monocromatico $f(t) = e^{-i\omega t} \Rightarrow g(t) = L(f(t) = H(\omega)e^{-i\omega t}$

$\forall$ segnale $\mathcal{F}$-trasformabile: $g(t) = L(f(t)) = \frac{1}{2\pi}\int f(\omega)H(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$

Funzione di Green:

$G =$*funzione di Green* | funzione di trasferimento più generale:

$$g(t) = \int G(t-x)f(x)dx = G * f(t) \tag{13}$$

Risposta alla $\theta(t)$:

Funzione di Green: $G(t) = \frac{dg}{dt} \qquad g(-\infty) = 0 \qquad g(\infty) = \hat{G}(0)$

Tempo di Salita: $t_s| \quad t_s\frac{dg}{dt}|_{max} = g(\infty) - g(-\infty) = 0$

$\mathcal{F}$-Trasformata:

cerco $\hat{g}(t) = \hat{G}(t)\hat{\theta}(t)$ ma $\theta(t)$ non $\mathcal{F}$-trasformabile

$\theta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n \,|\, \exists \hat{f}_n \;\Rightarrow \hat{\theta}(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}_n\hat{G}(t)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{2}G(0) + i\text{VP}\int\frac{G(t)e^{-i\omega t}}{2\pi\omega}d\omega$

4 Distribuzioni

Funzionale:

Sia F un appropriato spazio vettoriale di funzioni. Sia D un appropriato spazio di numeri.
Un funzionale è relazione Φ che lega funzioni $f(x) \in F$ $(x \in D)$ a $y \in D$ cioè: $\Phi : F \to D$ con $\Phi(f(x)) = y$

Distribuzione:

Funzionale lineare continuo su spazio vettoriale di funzioni test: $\psi \to \langle T, \psi \rangle$

Linearità: $\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle + \beta \langle T, \psi \rangle \qquad \alpha, \beta \in D$

Continuità: $\forall \{\psi_n\} \mid \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle T, \psi_n \rangle = \langle T, \psi \rangle$ (da definire in F: $\psi_n \to 0$)

Convergenza: $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ in $D \Leftrightarrow \forall \psi \in D \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle$

Completezza: Se $\forall \psi \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle$ con T continuo rispetto a $\psi_j \to 0 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \langle T, \psi_j \rangle = 0$

Spazi di funzioni test:

Spazi Vettoriali:

Risultano spazi vettoriali definendo: $\alpha T : \langle \alpha T, \psi \rangle = \alpha \langle T, \psi \rangle \qquad T+G : \langle T+G, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle + \langle G, \psi \rangle$

Distribuzione di Shwartz:

Spazio: $\mathcal{D} = \{\psi \mid \psi \in \mathcal{C}^\infty$ e a supporto compatto$\}$

Convergenza: $\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \Leftrightarrow \exists K$ compatto $\mid \forall K_n$ supporto di $\psi_n \Rightarrow K_n \subset K$ e $\lim_{n\to\infty} \psi^{(k)} = 0$ uniformemente $\forall k$

Insieme delle distribuzioni: $\mathcal{D}'$ duale di $\mathcal{D}$

Distribuzioni Temperate:

Spazio: $\mathcal{S} = \{\psi \mid \psi \in \mathcal{C}^\infty$ e $|x^n \psi^{(m)}| < A_{nm}\}$

Convergenza: $\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x^n \psi^{(m)} = 0$ uniformemente $\forall p, q$

Insieme delle distribuzioni: $\mathcal{S}'$ duale di $\mathcal{S}$ su cui si definisce Trasformata di Fourier

Distribuzioni su funzioni $\mathcal{C}^\infty$:

Spazio: $\mathcal{E} = \{\psi \mid \psi \in \mathcal{C}^\infty\}$

Convergenza: $\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi^{(k)} = 0$ uniformemente $\forall k \, \forall$ compatto

Insieme delle distribuzioni: $\mathcal{E}'$ duale di $\mathcal{E}$

Relazioni:

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

$\mathcal{S} \subset \mathbb{L}^2 \qquad \mathcal{S} \subset \mathbb{L}^1 \qquad \mathcal{D} \subset \mathbb{L}^1 \qquad \mathcal{D} \subset \mathbb{L}^2$

$\mathbb{L}^2 \subset \mathcal{S}' \qquad \mathbb{L}^1 \subset \mathcal{S}' \qquad \mathbb{L}^1 \subset \mathcal{D}' \qquad \mathbb{L}^2 \subset \mathcal{D}'$

$\mathcal{D}$ denso in $\mathcal{S} : \forall \psi \in \mathcal{S} \, \exists \{\psi_n\} \in \mathcal{D} \mid \psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi \quad \Rightarrow T = G$ in $\mathcal{S} \Rightarrow T = G$ in $\mathcal{D}$

$\mathcal{D}$ denso in $\mathcal{E} : \forall \psi \in \mathcal{E} \, \exists \{\psi_n\} \in \mathcal{D} \mid \psi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \psi \quad \Rightarrow T = G$ in $\mathcal{E} \Rightarrow T = G$ in $\mathcal{D}$

Distribuzioni in $\mathcal{D}'$:

Localmente Integrabili:

Ogni f localmente integrabile (secondo Lebesgue) ha associata una distribuzione $T_f \mid$
$\langle T_f, \psi \rangle = \int_K f(x)\psi(x)dx$
$\langle f, \psi \rangle = \langle g, \psi \rangle \Leftrightarrow f = g$ Q.O.

Delta di Dirac:

$\delta(x - x_0)$ è una distribuzione $\mid \langle \delta(x - x_0), \psi(x) \rangle = \psi(x_0)$

Valore Principale di $\frac{1}{x}$

$f = \frac{1}{x}$ ha associata la distribuzione $T_{1/x} \mid \langle T_{1/x}, \psi \rangle = \mathrm{VP}\int \frac{\psi(x)}{x} dx$

Funzione di Heaviside:

$\theta(x)$ è una distribuzione $\mid \langle \theta(x), \psi(x) \rangle = \begin{cases} \psi(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ Utile esprimere $\theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sgn}(x)}{2}$

Funzione Test Dispari:

$\psi \in \mathcal{D}$, ψ dispari $\Rightarrow \frac{\psi}{x} \in \mathcal{D}$ (utilizzando Taylor con resto di Lagrange)

Generate da $f(x)$ continua:

dato intervallo $I \, \forall \, \psi \,|\, \sigma(\psi) \in I, \forall T \exists f(x) \in \mathcal{C}^0 \,|\, \langle T, \psi \rangle = \langle f^{(n)}, \psi \rangle$

Limiti:

$f(x) \in \mathbb{L}^1_{\text{loc}}, \quad |\int_0^x f(t)dt| < M \, \forall \, x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ in $\mathcal{D}'$

$\lim_{n\to\infty} \sin(nx) = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \cos(nx) = 0 \quad \lim_{n\to\infty} e^{inx} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} e^{-inx} = 0$

$\nexists$ norma in $\mathcal{D}' \Rightarrow$ Non valgono le regole di limite: limite del prodotto $\neq$ prodotto dei limiti

Distribuzioni in $\mathcal{S}'$:

Temperate

Ogni f localmente integrabile per la quale $\exists \, m \,|\, \frac{f}{1+|x|^m} \in \mathbb{L}^1$ ha associata una distribuzione $T_f \,|$ $\langle T_f, \psi \rangle = \int_K f(x)\psi(x)dx$

$\langle f, \psi \rangle = \langle g, \psi \rangle \Leftrightarrow f = g$ Q.O.

Ogni f localmente integrabile e limitata ha associata una distribuzione T_f

Delta di Dirac:

$\delta(x - x_0)$ è una distribuzione $\,|\, \langle \delta(x - x_0), \psi(x) \rangle = \psi(x_0)$

Valore Principale di $\frac{1}{x}$

$f = \frac{1}{x}$ ha associata la distribuzione $T_{1/x} \,|\, \langle T_{1/x}, \psi \rangle = \text{VP}\int \frac{\psi(x)}{x} dx$

Funzione di Heaviside:

$\theta(x)$ è una distribuzione $\,|\, \langle \theta(x), \psi(x) \rangle = \begin{cases} \psi(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ Utile esprimere $\theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{\text{sgn}(x)}{2}$

Generate da $f(x)$ continua:

$\forall \, T \in \mathcal{S}' \, \exists f(x) \in \mathcal{C}^0$ a crescita al più polinomiale $\,|\, D^n f(x) = T$ (derivata distribuzionale)

Parità delle Distribuzioni:

Distribuzione Inversa: $\check{T} = T(-x) \;\;|\;\; \langle T(-x), \psi(x) \rangle = \langle T(x), \psi(-x) \rangle$

Continuità e Linearità: $T(x)$ conitinua e/o lineare $\Rightarrow T(-x)$ continua e/o lineare

Parità: T pari $\quad \Leftrightarrow \quad T(x) = T(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \langle T, \psi_{\text{dispari}} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T, \psi \rangle = \langle T, \psi_{\text{pari}} \rangle$

Disparità: T dispari $\quad \Leftrightarrow \quad T(x) = -T(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \langle T, \psi_{\text{pari}} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T, \psi \rangle = \langle T, \psi_{\text{dispari}} \rangle$

Successioni: $\{T_n\}$ successione di distribuzioni pari [dispari], $\lim_{n\to\infty} T_n = T \Rightarrow T$ è pari [dispari]

Sviluppo: In presenza di parità definita di T o ψ utile sviluppare con Taylor con resto di Lagrange per risolvere divergenze e verificare appartenenza in $\mathcal{D}$ o $\mathcal{S}$

Derivata delle Distribuzioni:

$\langle DT, \psi \rangle = -\langle T, \psi' \rangle$

Derivata n-esima: $\langle D^n T, \psi \rangle = (-1)^n \langle T, \psi^{(n)} \rangle$

Continuità: $D^n : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ è continua

Parità: T pari [dispari] $\Rightarrow DT$ dispari [pari]

Discontinuità: $T_f \,|\, f \in \mathcal{C}^1$ a tratti e $\exists \lim_{x\to x_{i\pm}}$: $DT_f = Df = \sum_i d(x_i)\delta(x - x_i) + \{f'\}$

discontinuità: $d(x_i) = f(x_{i+} - x_{i-})$ discontinuità in x_i

derivata: $\{f'\}$ è il valore della f' nei tratti dove è definita, cioè $\langle \{f'\}, \psi \rangle = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\psi(x)dx$

θ: $D\theta(x) = \delta(x)$

Segno: $D\text{sgn(x)} = 2\delta(x)$

Serie Convergenti in D':

Derivata:

f_n localmente integrabili ($\in \mathcal{D}'$), $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ convergente $\forall K$ compatto $\Rightarrow$
S localmente integrabile $\Rightarrow S \in \mathcal{D}' \Rightarrow D^k S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ (anche se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ non converge in $\mathbb{L}^2$)

Riordinamento:

Serie riordinabile se serie numerica $\lim_{n\to\infty} \langle \sum T_n, \psi \rangle = \sum_n c_n$ converge (e non se $\sum_n |T_n|$ converge)

Serie Notevoli:

$\sum_{i=1}^{\infty} e^{inx} = \mathrm{VP}\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} + \sum_{n=0}^{\infty} \pi\delta(n - 2n\pi)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} e^{inx} = \frac{x^2}{2} - \pi x + c$ (le f_n sono periodiche e limitate, se si impone: $\int_0^{2\pi} f(x) = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi^2}{3}$)

Formula di Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n\pi) \tag{14}$$

su funzione test: $\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}, \psi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e^{inx}, \psi \rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(n)$

Moltiplicazione di funzione e distribuzione:

$g(x)$ funzione, $g(x)T$ distribuzione $\forall T \Leftrightarrow \langle gT, \psi \rangle = \langle T, g\psi \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} g \in \mathcal{C}^\infty & \text{se } T \in \mathcal{D}' \\ \forall n, g^{(n)} \exists m \,|\, g^{(n)} < x^m & \text{se } T \in \mathcal{S}' \end{cases}$

T a supporto compatto: T a supporto compatto $K \Rightarrow gT$ distribuzione $\Leftrightarrow g \in \mathcal{C}^\infty$ su aperto $A \supset K$

Derivata: $D(gT) = g'T + gDT$

Delta: $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x) \qquad g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(x)\delta(x)$

Traslazione:

$\langle T(x+a), \psi(x) \rangle = \langle T(x), \psi(x-a) \rangle$

Partizione dell'Unità:

A aperto, $K \subset A$ compatto, $A_i \subset A_i \,\forall i, \{A_i\}$ copertura finita di K
$\Rightarrow \exists \psi_i \in \mathcal{D}(A_i) \,| \qquad 0 \le \sum_{i=1}^{n} \psi_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \psi_i = 1$ su X aperto $\,| \, K \subset X \subset A$

Zeri:

$T = 0$ in $A \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$ si ha $\langle T, \psi \rangle = 0$ con $\mathcal{D}(A) = \{\psi \in \mathcal{D} \,|$ supporto di $\psi \in A\}$
$T = 0$ in $x_0 \Leftrightarrow \exists\, I(x_0) \,| \, T = 0$ in I

supporto: $\sigma = \{x | T(x) \neq 0\}$ (σ è chiuso, complementare dell'insieme degli zeri di T)

Punti$\leftrightarrow$Insieme: $T = 0 \,\forall x \in A$ aperto $\Rightarrow T = 0$ in A

Supporti disgiunti: $\sigma_T \cap \sigma_\psi = 0 \Rightarrow \langle T, \psi \rangle = 0$

Distribuzioni a supporto compatto:

σ_T compatto, $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta = 1$ nell'aperto $A \supset \sigma_T \Rightarrow T = \eta T$ (cioè $\langle \eta T, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle$)
$T \in \mathcal{D}', \sigma_T$ compatto$\Rightarrow T \in \mathcal{E}'$ (cioè le distribuzioni di $\mathcal{D}'$ a supporto compatto sono quelle di $\mathcal{E}'$

Ordine di una distribuzione: $N =$ordine di $T \,|$
$T \in \mathcal{D}', \sigma_T$ compatto$\Rightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \,|\, |\langle T, \psi \rangle| \le M \sup_{k \le N} |\psi^{(k)}|$ (indipendenti da ψ)
$T \in \mathcal{S}', \sigma_T$ compatto$\Rightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \,|\, |\langle T, \psi \rangle| \le M \sup_{j,k \le N} |x^j \psi^{(k)}|$ (indipendenti da ψ)

Estensione

Distribuzioni a Supporto Puntiforme:

$\sigma_T = x_0, \quad N =$ordine di $T \quad \Rightarrow \quad T = \sum_{k=0}^{N} a_k \delta^{(k)}(x - x_0)$
$\sigma_T = x_0, \quad \psi^{(k)} = 0 \,\forall k \le N \Rightarrow \quad \langle T, \psi \rangle = 0$

4.1 δ di Dirac

Delta di Dirac:

$\delta(x-x_0)$ è una distribuzione $\mid \langle \delta(x-x_0), \psi(x)\rangle = \psi(x_0)$

Successioni che tendono alla $\delta(x)$:

$g \mid \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \int_{-\infty}^{x} g(nt)dt = \int_{-\infty}^{nx} g(t)dt = \theta(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ng(nx) = \delta(x)$

$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{x} = \delta(x)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = \delta(x)$ $\quad \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1/n^2+x^2} = \delta(x)$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x} = \delta(x)$ $\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x\pm i\varepsilon} = \mathrm{VP}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$ $\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2} = \delta(x)$

δ applicata a funzione:

$\delta\big(f(x)\big) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ con $f(x)$ continua, x_i i tutti e soli $\mid f(x_i) = 0$ e $f'(x_i) \neq 0$

Derivata:

$x\delta'(x) = -\delta(x)$
$D\theta(x) = \delta(x)$
$D\mathrm{sgn(x)} = 2\delta(x)$

Integrale:

$\int \delta(x) = \theta(x) + a$ (a spesso determinato da condizioni di parità sulla trasformata)
$\int_0^{\infty} \delta(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f(0)$

Variazione argomento:

$\delta(ax-x_0) = \frac{1}{|a|}\delta(x-\frac{x_0}{a})$
$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(y-x)$
$\delta(-x) = \delta(x)$
$x\delta(x) = 0$

Dimensioni fisiche:

Ha le dimensioni 1/lunghezza: $[\delta(x)] = [x]^{-1}$

4.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$

Definizione:

$T \in \mathcal{S}', \psi \in \mathcal{S}$: $\quad \langle \mathcal{F}T, \psi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\psi\rangle$

Su $\mathbb{L}^1 \cup \mathbb{L}^2$: $f(x) \in \mathbb{L}^1 \cup \mathbb{L}^2 \Rightarrow \langle \mathcal{F}T_f, \psi\rangle = \langle T_f, \mathcal{F}\psi\rangle$ (cioè le trasformata nota e quella in $\mathcal{S}'$ coincidono)

Linearità:

il funzionale $\langle \mathcal{F}T_f, \psi\rangle$ è lineare in $\mathcal{S}'$

Continuità:

$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \psi\rangle = \langle T, \psi\rangle \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{F}T_n, \psi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \psi\rangle$
se $T \in \mathbb{L}^1 \Rightarrow \mathcal{F}(T)$ continua e $\lim_{\omega\to\infty} \mathcal{F}(T) = 0$

Parità:

$\mathcal{F}$ conserva la parita: $\quad T$ pari $\Rightarrow \mathcal{F}T$ pari, $\quad T$ dispari $\Rightarrow \mathcal{F}T$ dispari
$\mathcal{F}T(-x) = [\mathcal{F}T(-\omega)](x)$

Doppia Trasformata:

$T \in \mathcal{S}' \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(T)) = 2\pi T(-x) =$

Derivata:

$\mathcal{F}(DT) = -i\omega\mathcal{F}(T)$

Nota $\mathcal{F}(f/x)$: $g = \frac{f}{x}$ $\quad$ nota $\mathcal{F}(g)$ $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(f) = -i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}g$
Nota $\mathcal{F}(xf)$: $g = xf$ $\quad$ nota $\mathcal{F}(g)$ $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(f) = \int_a^{\omega} i\mathcal{F}(g)d\omega'$
(a porta costante additiva al risultato da determinare da condizioni limite su g o su f)

Prodotto:

$\mathcal{F}(xT) = -iD(\mathcal{F}(T))$

Traslazione:

$\mathcal{F}(T(x-a)) = e^{i\omega a}\mathcal{F}(T)$

Cambio di variabile:

$\mathcal{F}(T(ax)) = \frac{1}{a}\hat{T}(\frac{\omega}{a})$

Trasformate di Fourier Notevoli:

$\theta(x)$: $\mathcal{F}\theta(x) = i\mathrm{VP}(\frac{1}{\omega}) + \pi\delta(\omega)$

1: $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta(x)$

Segno: $\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(x)) = 2i\mathrm{VP}(\frac{1}{\omega})$

Delta: $\mathcal{F}\delta(x) = 1$

$\mathcal{F}(\delta_+) = \mathcal{F}(\frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2\pi i}\mathrm{VP}\frac{1}{x}) = \theta(x)$

$\mathcal{F}(\delta_-) = \mathcal{F}(\frac{1}{2}\delta(x) - \frac{1}{2\pi i}\mathrm{VP}\frac{1}{x}) = \theta(-x)$

$1/x$: $\mathcal{F}(\mathrm{VP}\frac{1}{x}) = i\pi\mathrm{sgn}(\omega)$

$\mathcal{F}(\frac{\sin(x)}{x}) = \pi\chi[-1,1]$

$1/\mathbf{x}^2$ $\mathcal{F}(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}) = \frac{2\pi^2}{|\mathbf{k}|}$

Esponenziale: $\mathcal{F}(e^{iax}T) = \hat{T}(\omega + a)$ (argomento traslato)

$\mathcal{F}(e^{iax}) = 2\pi\delta(\omega + a)$

Seno: $\mathcal{F}(\sin(x)T(x)) = \frac{1}{2i}(\hat{T}(\omega+1) - \hat{T}(\omega-1))$

$\mathcal{F}(\sin(ax)) = \frac{\pi}{i}(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a))$

Coseno: $\mathcal{F}(\cos(x)T(x)) = \frac{1}{2}(\hat{T}(\omega+1) + \hat{T}(\omega-1))$

$\mathcal{F}(\cos(ax)) = \pi(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a))$

x: $\mathcal{F}(x) = -i2\pi\delta(\omega)'$

Logaritmo: $\langle\mathcal{F}(\ln(|x|)), \psi\rangle = \int_{|\omega|<1}\frac{\psi(\omega)-\psi(0)}{|\omega|}d\omega + \int_{|\omega|>1}\frac{\psi(\omega)}{|\omega|}d\omega + \langle a\delta(\omega), psi\rangle$

4.3 Equazioni e Equazioni Differenziali con Distribuzioni

Soluzioni di $xT = V$:

Omogenea: $T \in \mathcal{D}'$, $T = a\delta(x)$ con a opportuna costante (spesso ricavabile da parità)

Non Omogenea: $T = \mathrm{VP}\frac{V}{x} + a\delta(x)$ (necessario il VP in ogni divisione per x)

Spesso risulta $a = 0$, ma è necessario inserirlo a priori dato che $\delta(x)x = 0$

$V = \theta(x)$: $\langle T, \psi\rangle = \int_0^1 \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x}dx + \langle a\delta(x), \psi\rangle$

$V = aT$: $T = c\delta(x-a)$ (autofunzioni di x)

Soluzioni di $x^nT = 1$:

Omogenea: $T = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^{(k)}(x)$

Non Omogenea: $T = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}\mathrm{VP}\frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^{(k)}(x)$

Soluzioni di $f(x)T = 0$:

$f(x) \in \mathcal{C}^\infty \,|\, \forall K$ compatto ha un numero finito di zeri x_i $T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k_i-1} a_{ij}\delta^{(j)}(x - x_i)$

($\forall I(x_i)$ di ordine k $T = \sum_{j=0}^{k-1} a_k\delta^{(j)}(x - x_0)$)

Zeri non Isolati: $f(x)$ ha zeri non isolati $\Rightarrow$ soluzione non applicabile

Soluzioni di $D^nT = 0$:

$T = P_{n-1}(x)$ un polinomio di grado n_1
Se $n = 1 \Rightarrow T = \text{const}$

Soluzioni di $DT = V$:

Esistenza: $T\,\exists$ ma non è unica, ma se T_1, T_2 soluzioni $\Rightarrow T_1 - T_2 = \text{const}$

Linearità e Continuità: T risulta lineare e continua

ψ Test a Integrale Nullo: $\forall\,\varphi = \psi' \Leftrightarrow \int \varphi = 0$ si ha $-\langle T, \psi'\rangle = \langle V, \psi\rangle$

ψ Test a Integrale Non Nullo: $\varphi = [\varphi(x) - I(\varphi)w(x)] + I(\varphi)w(x) \Rightarrow \int \varphi(x) = 0 + I(\psi)w(t) = k$
(con $I(\varphi) =$ integrale di φ e $w(x)\,|\,I(w) = 0$)

Soluzione Generale: $\langle T, \psi'\rangle = -\langle V, \psi\rangle + k = F(\psi') + h$
dove, di norma, F è una funzione integrale che permette di definire l'azione di T

Soluzioni di $DT = a(x)T + V$:

Metodo:
$Z = \frac{T}{u}$ da sostituire con $u(x)$ soluzione classica

Omogenea ($V = 0$):
in $\mathcal{D}'$, con $a(x) \in \mathcal{C}^\infty \quad T = \lambda u(x)$ con $u(x)$ soluzione di $Du(x) = a(x)u(x) \Rightarrow \quad T = \lambda e^{-\int_0^x a(t)dt}$
in $\mathcal{S}'$ non esistono soluzioni

Non Omogenea:
$DZ = \frac{V}{u(x)} \Rightarrow T = uZ$

Equazioni lineari di ordine n:

Equazione:
$D^N T + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) D^i T = V$

Metodo:
Trasformo l'equazione in un sistema di n equazioni del primo ordine $D\mathbf{Y} = -A(x)\mathbf{Y} + \mathbf{B}$
$(Y_i = D^{i-1}T \quad DY_i = A(x) = (1 - \delta_{in})Y_{i+1} + \delta_{in}(V - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)Y_{i+1}\ )$

$$\begin{cases} Y_1 = T \\ \dots \\ Y_n = D^{n-1}T \end{cases} \qquad \begin{cases} DY_1 = Y_2 \\ \dots \\ Y_{n-1} = Y_n \\ DY_n = -a_{n-1}Y_n - \dots - a_0 Y_1 + V \end{cases}$$

Omogenea ($V = 0$):
$D\mathbf{Y} = -A(x)\mathbf{Y}$ ha solo soluzioni classiche: $\mathbf{Y} = \mathbf{u}^{(i)}\mathbf{c}_i$

Non Omogenea:
Sia $U_{ji} = u_j^{(i)}, \quad Y = UZ \quad \Rightarrow \quad DZ = U^{-1}B$

5 Algoritmi risolutivi

Itegrazione di $f(x)$ con un numero finito di singolarità:

Da calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ con $x \in \mathbb{R}$

Ipotesi:

- l'integrale $\exists, < \infty$
- estendibile sul piano complesso $x \to z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z)$ analitica su tutto asse reale
- $f(z)$ è analitica $\forall\, z \mid \mathfrak{Im}(z) > 0$ tranne in un numero finito di punti
- $\lim_{R\to\infty}(R \max |f(z)|_{z\in\gamma}) = 0$ dove γ ed R saranno poi specificati.

Procedimento:

- Considero semicirconferenza γ su semipiano $\mathfrak{Im} > 0$, raccordata a segmento $[-R, R]$ su asse reale
- Ottengo: $\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_i \mathcal{R}_f(z_i)$
- Eseguo il limite per $R \to \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_i \mathcal{R}_f(z_i)$

Itegrazione di $f(x)$ con ∞ singolarità su asse immaginario:

Da calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ con $x \in \mathbb{R}$

Ipotesi:

- $f(z)$ ha infinite singolarità su asse immaginario, ma in numero finito altrove (o almeno in prossimità di quello reale)
- Periodicità di $f(x)$ in modo che $f(x + ik) = -f(x)$
- $\lim_{\mathfrak{Re}(z)\to\infty}(f(z)) = 0$

Procedimento:

- Considero rettangolo con base su asse reale, altezza k (da periodicità) e lati verticali a $\pm R$
- Eseguo il limite per $R \to \infty \Rightarrow 2\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_i \mathcal{R}_f(z_i)$ (ovviamente solo $\mathcal{R}$ interni)

Integrazione su zone varie:

- Nel mandare $R \to \infty$ considero $\lim_{|z|=R\to\infty} \int_\gamma f(Re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$
- Nel mandare $R \to \infty$ maggioro con Darboux: $\frac{R}{R^n}\int_\gamma |f(g(\theta))|d\theta \leq M\pi\frac{1}{R^n} \to 0$ dove $g(\theta)$ è solo la parte in θ di f (isolata parte in R)
- Nel mandare $\varepsilon \to 0$ considero $\lim_{|z|=\varepsilon\to 0} \int_0^{\theta_a} f(\varepsilon e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$
- Nel mandare $\varepsilon \to 0$ maggioro con Darboux: $\varepsilon^n \int_\gamma |f(g(\theta))|d\theta \leq M\varepsilon\pi\varepsilon^n \to 0$

Integrale con segmento non calcolabile esplicitamente

Se da percorso risulta $I = iJ + R$, con R residuo esplicito e J integrale non calcolato (da trovare I, $I \in \mathbb{R}$)

- Coniugo l'equazione: $I = -iJ + \bar{R}$
- Sommo o sottraggo a seconda dei segni: $2I = \bar{R}$
- Ricavo I esplicitamente ora non si ha più dipendenza da J

Non Esistenza del valore eccezionale:

z_0 singolarità essenziale per $f(z)$ (cioè $f(z) \neq w_0 \,\forall\, z \in I$)

- Suppongo che esista w_0 eccezionale in $I(z_0)$
- Dalla definizione di eccezionale $f(z) \neq w_0$
- Dall'unicità di w_0 si ha $f(z) = w_0 + k \Leftrightarrow f(z) - k = w_0$
- Scelgo k in modo che $f(z) - k = f(\zeta)$
- Ottengo un assurdo perché ho supposto $f(z) \neq w_0 \,\forall\, z \in I$

NB: ζ deve appartenere ad I, questo vuol dire scegliere $z \in J$ in modo che questo accada

Analiticità:

- Escludo domini estesi (semipiani, rette...) di non analiticità
- cerco $z_i \mid f(z_i) \to \infty$
- z_i non è regolare (non è detto che siano i soli!), $f(z_i)$ non analitica
- Se $f(z)$ è a un sol valore per $z \in I(z_i)$ è si ha un punto singolare isolato
- Altrimenti (se z_i non è un punto di accumulazione di poli) è un punto di diramazione

Punti di diramazione:

- (Definizione) $f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = f(z_0 + \rho e^{i(\theta+2\pi)})$
- Se $f(z) = f(g(z)^{\frac{a}{b}}) \Rightarrow z_i \mid g(z_i) = 0, \infty$ di diramazione
- Se $f(z) = f\big(\ln(f(z))\big) \Rightarrow z_i \mid g(z_i) = 0, \infty$ di diramazione
- Fogli: se $f(z)^(a/b) \Rightarrow b$ fogli, se esponente irrazionale o $ln \Rightarrow \infty$ fogli

Individuazione e ordine dei Poli:

NB: Utile utilizzare Hopital in ogni limite

- Ipotizzo che sia un polo di ordine k e faccio $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = L$.
  - Se $L = 0 \Rightarrow k >$ Ordine del polo
  - Se $L = \infty \Rightarrow k <$ Ordine del polo
- Cerco ordine degli zeri di $\frac{1}{f(z)}$
- Per trovare ordine dello zero derivo k volte finché non ottengo $f^(k)(z_0) \neq 0$ (l'ordine è k)

Individuazione Singolarità Essenziali:

- Se z_0 non è removibile e non un polo ($\forall n$ il limite non converge)
- è sviluppabile in ∞ potenze positive

Calcolo dei Residui

- Se polo del prim'ordine: $\mathcal{R}_f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ e uso Hopital su tale limite
- $f = g/h$ sotto ipotesi Hopital $\mathcal{R}_f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Sviluppi in Serie

- Utile ricondursi a $\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ per $a < 1$
- Raggio di convergenza $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}}$
- Talvolta $f(z) = \frac{d}{dz}g(z)$, con g(z) di cui si conosce lo sviluppo, quindi si deriva termine a termine

Integrale Notevole:

$I = \int \frac{dx}{1+x^\alpha}$

$J(b) = \int_0^\infty \frac{1}{b+x^\alpha} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\partial J(b)}{\partial b}|_{b=1} \quad \Rightarrow \quad [x = b^{1/\alpha t}] \quad J(b) = b^{1/\alpha - 1}\int_0^\infty \frac{1}{b^\alpha} = b^{1/\alpha-1}\frac{\pi}{\alpha}\frac{dt}{sin^2(\pi/\alpha)}$

Problema di Potenziale - Semipiano, bordo in 2 pezzi:

- Problema: $\nabla^2 u = 0 \quad \text{se } y > 0 \text{ con } \begin{cases} u(x,0) = a & \text{se } x > 0 \\ u(x,0) = b & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- Cerco soluzione del tipo $u = c_1 + c_2 \arg(z)$
- Inserisco nelle condizioni al bordo: $b = c_1 \quad a = c_2\pi + c_1 \Rightarrow c_2 = \frac{(a-b)}{\pi}$ NB: $\begin{cases} \arg(x) = \pi \text{ se } x < 0 \\ \arg(x) = 0 \text{ se } x > 0 \end{cases}$
- Soluzione: $u = b + \frac{a-b}{\pi} \arg(z)$

Problema di Potenziale - Semipiano, bordo in 3 pezzi

- Problema: $\nabla^2 u = 0 \quad \text{se } y > 0 \text{ con } \begin{cases} u(x,0) = a & \text{se} x \in]-\infty, -x_1[\\ u(x,0) = b & \text{se } x \in [-x_1, x_1] \\ u(x,0) = d & \text{se} x \in [x_1, \infty[\end{cases}$
- Cerco soluzione del tipo: $u = c_1 + c_2 \arg(z - x_1) + c_3 \arg(z + x_1)$
- Impongo condizione al bordo, usando u sopra definita: $c_1 = d \quad c_2 = \frac{b-d}{\pi} \quad c_3 = \frac{a-b}{\pi}$
- Soluzione: $u(z) = c + \frac{b-d}{\pi} \arg(z - x_1) + \frac{a-b}{\pi} \arg(z + x_i)$

Problema di Potenziale - Cerchio (particolare):

- Problema generale: la soluzione si individua mediante la formula di Poisson
- Problema particolare: $\nabla^2 u = 0 \quad \text{se } |z| < R \text{ con } \quad u(R) = \cos(n\theta)$
- z^n è analitica sul cerchio, cerco soluzione del tipo: $\Re(Az^n) = u(z) = A\rho^n \cos(n\theta)$
- Impongo condizione al bordo, usando u sopra definita: $u(R) = aR^n \cos(n\theta) = \cos(n\theta)$
- Soluzione: $u(z) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos(n\theta)$

Problema di Potenziale - Corona Circolare:

- Problema particolare: $\nabla^2 u = 0 \quad \text{se } R_1 |z| < R_2 \text{ con } \begin{cases} u(R_1) = 0 \\ u(R_2) = \cos(n\theta) \end{cases}$
- Sia z^n sia $\frac{1}{z^n}$ sono analitiche sulla corona circolare, ma non posso usarne solo una perché altrimenti non potrei annullare la funzione in R_1
- cerco soluzione del tipo: $\Re(Az^n + B\frac{1}{z^n}) = u(z) = A\rho^n \cos(n\theta) + B\frac{1}{\rho^n} \cos(n\theta)$
- Impongo condizioni al bordo, usando u sopra definita
- Soluzione: $u(z) = \frac{cos(n\theta)}{R_1^{2n} - R_2^{2n}} \left((\frac{R_1^2 R_2}{\rho})^n - (R_2\rho)^n \right)$

Problema di Potenziale - simmetria radiale 2D:

- in presenza di simmetria radiale, per $u(z)$ armonica, $\nabla^2 = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$
- separando le variabili si ottiene: $u = A \ln|z| + B$
- $A.B$ determinate da condizioni al bordo

Problema di Potenziale - Soluzione tramite funzione di Green:

- Nota funzione di green $G(\mathbf{r}, vecr_0)$ della geometria, u armonica
- Problema di Dirichlet: $u(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(u \frac{\partial G}{\partial n}\right) dS$
- Problema di Neumann: $u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial A} \left(G \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + \frac{K_2}{4\pi}$
- Ogni costante è da determinare con condizioni al bordo

Trasformazioni conformi - Cerchi↔Quadranti:

semicerchio→quadrante:

- devo mandare segmento (diametro) e semicirconferenza in due semirette ortogonali con l'intersezione nell'origine.
- mando i punti d'intersezione della circonferenza con il segmento uno in zero, uno all'infinito.
- Le due curve devono continuare a intersecarsi in tali punti⇒ passano entrambi da 0 e $\infty \Rightarrow$ rette
- si mantiene l'ortogonalità in 0, cioè le due rette sono ortogonali
- Il risultato è che ho mandato l'asse reale in se steso e la semicirconferenza nell'asse immaginario
- mediamente la forma è $w(z) = \pm\frac{z\pm R}{z\mp R}$ dove R è il raggio della circonferenza (centrata nell'origine) e il segno è in base al quadrante dove si vuole mandare
- per determinare il segno si testa su punti notevoli (ad esempio $\pm i$)

quadrante→semicerchio:

- Come sopra, si conservano intersezioni e ortogonalità usando 0 e ∞
- Si possono usare come riferimento punti simmetrici alle rette che quindi risultano simmetrici al cerchio
- Banalmente si può invertire la trasformazione sopra riportata: $w(z) = \pm\frac{z\pm Ri}{z\mp Ri}$

Linee di Forza e Equipotenziali (condizioni al bordo costanti):

- Equipoteniali quadrante: rette dall'origine
- Equipotenziali cerchio: archi di cerchio passanti dai due punti di intersezione cerchio-diametro
- Linee di forza quadrante: archi di circonferenza centrati nell'origine
- Linee di forza cerchio: archi di cerchio centrati nei due punti di intersezione cerchio-diametro

Individuare centro dei cerchi equipotenziali:

(suppongo nota $w(z)$ manda cerchio in retta)

- individuo la retta equipotenziale ρ di cui si cerca il centro
- individuo $w = w_0 \,|\, z(w_0) = \infty$
- calcolo il simmetro di w_0 rispetto a ρ: $S(w_0)$
- w_0 e $S(w_0)$ devono rispettare la condizione: $w_0 e^{-i\theta} = \overline{S(w_0)} e^{i\theta}$
- $S(w_0)$ verrà mandato nel simmetrico di ∞ per il cerchio, cioè il centro z_0
- ricavo $z(w)$, trasformazione conforme inversa
- calcolo allora $z(S(w_0)) = z_0$ centro della circonferenza
- si ricorda che $S_R(z(S_\rho(w_0))) = z(w_0) = \infty$

Trasformazioni Conformi - Quadranti ↔ Semipiani:

- quadranti→semipiani: a seconda del quadrante utile $w(z) = z^2$ (raddoppia argomento)
- semipiani→quadrante: a seconda del quadrante utile $w(z) = \sqrt{z}$ (dimezza argomento)
- se voglio restringermi a settore del piano che è $\frac{1}{k}2\pi \Rightarrow w(z) = z^k$

Trasformazioni Conformi: Cerchi↔ Cerchi concentrici:

- Deve esistere almeno una coppia di punti simmetrici per entrambi i cerchi non concentrici in z, dato che in w entrambi i cerchi hanno $0, \infty$ come punti simmetrici
- Individuo le coppie di punti simmetrici per entrambi i cerchi non concentrici
- Devo risolvere $\begin{cases} (z_1 - z_{01})(\bar{z}_2 - \bar{z}_{01}) = R_1^2 \\ (z_1 - z_{02})(\bar{z}_2 - \bar{z}_{02}) = R_2^2 \end{cases}$
- Trasformazione deve mandare tali punti in 0 e ∞: $w(z) = \pm\frac{z-z_1}{z-z_2}$

Calcolo della Trasformata di Fourier tramite Residui:

- Scrivo esplicitamente la trasformata come integrale
- sul semipiano $|\mathfrak{Im}(z) > 0 \Rightarrow e^{i\omega z}$ diverge se $\omega < 0$ (infatti $e^{i\omega z} = e * i\omega x + iy = e^{i\omega x - \omega y}$)
- sul semipiano $|\mathfrak{Im}(z) < 0 \Rightarrow e^{i\omega z}$ diverge se $\omega > 0$
- Scelgo un cammino semicircolare γ_+ sul semipiano superiore e γ_- sul semipiano inferiore
- Integro allora su $\begin{cases} \gamma_+ & \text{se } \omega > 0 \\ \gamma_- & \text{se } \omega < 0 \end{cases}$
- Utilizzando il Lemma di Jordan, mandando $R \to \infty$ e ottengo:
  $2\mathcal{F}(f(x)) = 2\pi i \sum_{\text{interni}\,\mathfrak{Im}>0} \mathcal{R}_F(z_i) + 2\pi i \sum_{\text{esterni}\,\mathfrak{Im}<0} \mathcal{R}_F(z_i)$